Inhaltsverzeichnis

1 Beweisverfahren **2**

1.1 Indirekter Beweis 2

1.2 Beweis durch vollständige Induktion 3

1.3 Direkter Beweis 4

Kapitel 1

Beweisverfahren

Beweise sind in der Schulmathematik meist die schwierigsten Aufgaben und stellen zumeist die Zusatzaufgaben in Klausuren dar, da viele Schüler Probleme mit Ihnen haben. Das wichtigste und auch am schwierigsten zu trainierende an einem Beweis ist die Beweisidee zu entwickeln, wie man den Beweis angeht.
Durch ein wenig Training, fällt dies aber immer leichter, denn allen Beweisen liegt eines zugrunde:

Logik

Durch sie kann man mit ein wenig Wissen jeden Beweis führen.
Man unterscheidet drei verschiedenen Arten von Beweisen:

1.1 Indirekter Beweis

Die indirekte Beweis ist einer der elegantesten und auch einfachsten Beweise. Das Vorgehen hierbei ist eigentlich ziemlich einfach:

1. Man negiert die Behauptung des Satzes.
2. Man versucht dann den Beweis zu einem Widersprcuh zu führen (z.B.: 1=2)
3. Da der Beweisgang legitim und logisch war, muss die Annahme falsch gewesen sein, also folgt die Behauptung des Satzes.

Beispiel 1.1.1 *Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.*
Beweis (indirekt): Annahme die Behauptung ist falsch, d.h. $\sqrt{2}$ ist rational.
Dann gibt es a,b $\in \mathbb{Z}$, so dass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (vgl. hierzu Kapitel 1.2). Nehmen wir weiter an, das a und b teilerfremd sind, d.h. der Bruch vollständig gekürzt ist. Dies ist legitim, denn gibt es einen Bruch $\frac{a}{b}$ der diese bedingung erfüllt, so erfüllen alle Vielfachen sie auch.
Es gilt also

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1.1}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \tag{1.2}$$

$$2b^2 = a^2 \tag{1.3}$$

$2b^2$ *ist nun offensichtlich eine gerade Zahl, also muss* a^2 *gerade sein, d.h. es gibt eine Zahl r, so dass*

$$a^2 = 2r \tag{1.4}$$

Nun muss man sich klar machen, dass a auch gerade sein muss, denn ist eine Quadratzahl gerade, so muss die Zahl selber auch gerade sein. Also gibt es auch ein s, so dass gilt

$$a = 2s \tag{1.5}$$

Durch Einsetzen erhalten wir nun

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 && (1.6)\\ 2b^2 &= (2s)^2 && (1.7)\\ 2b^2 &= 4s^2 && (1.8)\\ b^2 &= 2s^2 && (1.9) \end{aligned}$$

Dies heisst nun aber auch, dass b^2 gerade ist und somit auch wieder b gerade sein muss, dass heisst aber auch, dass 2 Teiler von a und Teiler von b ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist.
Also ist unsere Anahme falsch, d.h. $\sqrt{2}$ ist nicht rational, also muss $\sqrt{2}$ irrational sin.

Achtung! Bei diesem Beweisverfahren gibt es zwei grosse Fehlerquellen:

1. die Negation der Behauptung ist falsch (vgl Beispiel)

2. der Beweishergang wird nicht korreckt geführt (z.B. durch 0 teilen)

Beispiel 1.1.2 *Behauptung: 1 ist die grösste reelle Zahl.*
Beweis (indirekt): Annahme die Behauptung ist falsch, d.h. es gibt eine andere grösste Zahl y.
Es ist nun 1<y, also ist y insbesondere eine positive Zahl, d.h. wir können die Ungleichung mit y multiplizieren und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &< y && (1.10)\\ y &< y^2 && (1.11) \end{aligned}$$

Dass ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass y die grösste reelle Zahl ist, also folgt die Behauptung und somit ist 1 die grösste reelle Zahl.

Wo liegt der Fehler?

In der Negation der Behauptung! Die richtige Negation müsste lauten: *1 ist nicht die grösste reelle Zahl*

1.2 Beweis durch vollständige Induktion

Der Beweis durch vollständige Induktion wird immer dann angewendet, wenn Aussagen für natürliche Zahlen gemacht werden.
Ist A(n) eine Aussage über natürliche Zahlen, weiter sei A(0) wahr und dann folgt ist A(n) wahr für ein beliebiges n, so auch A(n+1). Man führt den Beweis dann folgendermassen:

1. Induktionsverankerung/Induktionsanfang: A(0)

2. Induktionsschritt: Man nimmt an A(n) ist wahr und zeigt, dass A(n+1), dann auch wahr ist.

daraus folgt dann, dass A(n) für alle n gilt.

Beispiel 1.2.1 *Man zeige: 1+2+3+...+n* $= \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$
Beweis (durch vollständige Induktion)
Induktionsanfang (n=1): 1 $= \frac{1(1+1)}{2}$ $\surd$
Induktionsschritt n $\rightarrow$ n+1: Annahme die Behauptung ist für ein beliebiges festes n wahr, d.h.

1+2+3+…+n $= \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \tag{1.12}$$

Also ist die Behauptung auch für n+1 wahr, somit gelingt der Induktionsschritt, also ist die Behauptung für alle n wahr.

1.3 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis versucht man die Behauptung durch Umformen zu beweisen.

Beispiel 1.3.1 *Zeigen Sie für q≠1:*

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{1.13}$$

Beweis direkt:

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{1.14}$$

$$(1 + q + q^2 + ... + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1} \tag{1.15}$$

$$(1 + q + q^2 + ...q^n) - (q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \tag{1.16}$$

Auf der linken Seite heben sich nun alle Potenzen von q weg und es ergibt sich

$$(1 + q + q^2 + ...q^n) - (q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \tag{1.17}$$

$$1 + q - q + q^2 - q^2 + ... + q^n - q^n + q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \tag{1.18}$$

$$1 + q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \tag{1.19}$$

Also folgt die Behauptung