In Arbeit !

Bruchungleichungen

Aufgaben mit Lösungsweg zur Webseite www.mathematik.net

Version: 1.3.2008 16.15 Uhr

1. Bruchungleichungen mit einem Bruch: Lösen durch Fallunterscheidung

Löse diese Bruchungleichungen durch Multiplikation mit dem Nenner.
Beachte, dass dabei eine Fallunterscheidung nötig ist:

Aufgaben mit nur einem Bruch:

$$1a)\quad \frac{2x+8}{x+3} < 0$$

$$1b)\quad \frac{6x+12}{4x-8} > 0$$

$$1c)\quad \frac{3x-21}{x-1} \leq 0$$

$$1d)\quad \frac{7x-7}{x-1} \geq 0$$

Aufgaben mit nur einem Bruch und einer Konstante:

$$1e)\quad \frac{2x+6}{x+1} > 3$$

$$1f)\quad \frac{6x+4}{4x} < 2$$

$$1g)\quad \frac{3x+21}{2x+1} \geq 1$$

$$1h)\quad \frac{4x-4}{2x+3} \geq 2$$

Bei zwei Brüchen sollte man vor der Fallunterscheidung zuerst kürzen und beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

$$1i)\quad \frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2}$$

$$1j)\quad \frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3}$$

$$1k)\quad \frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12}$$

$$1l)\quad \frac{3x+15}{2x-2} \geq \frac{6x+3}{4x-4}$$

$$1m)\quad \frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4}$$

$$1n)\quad \frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9}$$

2. Bruchungleichungen mit ein oder zwei Brüchen: Satz über das Vorzeichen eines Quotienten

Löse die Ungleichungen, indem du beide Brüche zusammenfasst (auf eine Seite bringen, die Brüche durch Erweitern gleichnamig machen und zusammenfassen) und dann den folgenden Satz anwendest:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind, oder wenn beide kleiner als Null sind. Ein Bruch ist kleiner als Null, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben.

Aufgaben mit nur einem Bruch und einer Konstante:

$$2a)\quad \frac{2x+6}{x+1} > 3$$

$$2b)\quad \frac{6x+4}{4x} < 2$$

$$2c)\quad \frac{3x+21}{2x+1} \geq 1$$

$$2d)\quad \frac{4x-4}{2x+3} \geq 2$$

Bei zwei Brüchen ist das Verfahren nur in Sonderfällen mit vertretbarem Aufwand anwendbar:

$$2e)\quad \frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2}$$

$$2f)\quad \frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3}$$

$$2g)\quad \frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12}$$

$$2h)\quad \frac{3x+15}{2x-2} \geq \frac{6x+3}{4x-4}$$

$$2i)\quad \frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4}$$

$$2j)\quad \frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9}$$

3. Bruchungleichungen mit zwei oder mehr Brüchen: Umformung in die Produktform einer algebraischen Ungleichung

Löse die Ungleichungen, indem du alle Brüche auf eine Seite bringst, die Brüche durch Erweitern gleichnamig machst, die Brüche zusammenfasst und mit dem Quadrat des Nenners multiplizierst. Dadurch werden die Bruchungleichungen zu Algebraischen Ungleichungen in Produktform. Löse dann die Algebraischen Ungleichungen mit dem Tabellenverfahren:

$$3a)\quad \frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{3x-2}$$

$$3b)\quad \frac{3x+15}{2x-2} > \frac{6x+3}{4x-10}$$

$$3c)\quad \frac{2x+9}{x-1} \geq \frac{6x+1}{3x-5}$$

$$3d)\quad \frac{6x+2}{4x+1} \leq \frac{3x+10}{2x+5}$$

Das Verfahren funktioniert auch bei drei Brüchen:

$$3e)\quad \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1} < \frac{3}{x-2}$$

$$3f)\quad \frac{3}{2x-8} + \frac{1}{2x-4} < \frac{2}{x-3}$$

$$3g)\quad \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-1} < \frac{5}{x-2}$$

$$3h)\quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x+2} < \frac{1}{2x-6}$$

Das Verfahren funktioniert auch bei vier Brüchen:

$$3i)\quad \frac{2}{3x-15} - \frac{3}{2x-8} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6x-12} \geq 0$$

(Lösungsweg fehlt noch)

$$3j)\quad \frac{7}{2x+4} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+3} + \frac{3}{2x+8} < 0$$

(Lösungsweg fehlt noch)

Lösung zu 1a

⓿Gegebene Bruchungleichung:
Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+8}{x+3} < 0 \quad D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):
Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x+3)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(x+3)$ ist kleiner als Null
$x+3>0$	$x+3<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$2x+8<0\cdot(x+3)$	$2x+8>0\cdot(x+3)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} x+3>0 \\ 2x+8<0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x+3<0 \\ 2x+8>0 \end{array}\right|$$

❷Ungleichungssysteme lösen:
In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 3.
In den beiden unteren Ungleichugnen subtrahieren wir jeweils 8:

$$\left.\begin{array}{l} x+3>0 \\ 2x+8<0 \end{array}\right|\begin{array}{l} -3 \\ -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x+3<0 \\ 2x+8>0 \end{array}\right|\begin{array}{l} -3 \\ -8 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-3 \\ 2x<-8 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-3 \\ 2x>-8 \end{array}\right|$$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 2,

$$\left.\begin{array}{l} x>-3 \\ 2x<-8 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x<-3 \\ 2x>-8 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-3 \\ x<-4 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-3 \\ x>-4 \end{array}\right|$$

Das linke System hat keine Lösung, das rechte System hat die Lösung $\boxed{-4<x<-3}$.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):
Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-4,-3)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\{x\,|\,-4<x<-3\}}}$$

Lösung zu 1b

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{6x+12}{4x-8} > 0 \quad D=\mathbb{R}\setminus\{2\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(4x-8)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(4x-8)$ ist kleiner als Null
$4x-8>0$	$4x-8<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$6x+12>0\cdot(4x-8)$	$6x+12<0\cdot(4x-8)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-8>0 \\ 6x+12>0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 4x-8<0 \\ 6x+12<0 \end{array}\right|$$

❷Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 8.
In den beiden unteren Ungleichugnen subtrahieren wir jeweils 12:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-8>0 \\ 6x+12>0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +8 \\ -12 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 4x-8<0 \\ 6x+12<0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +8 \\ -12 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x>8 \\ 6x>-12 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 4x<8 \\ 6x<-12 \end{array}\right|$$

Die beiden oberen Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 4.
Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 6:

$$\left.\begin{array}{l} 4x>8 \\ 6x>-12 \end{array}\right|\begin{array}{l} :4 \\ :6 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 4x<8 \\ 6x<-12 \end{array}\right|\begin{array}{l} :4 \\ :6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>2 \\ x>-2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<2 \\ x<-2 \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung $\boxed{x>2}$., das rechte System hat die Lösung $\boxed{x<-2}$.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\{x\,|\,x<-2 \text{ oder } x>2\}}}$$

Lösung zu 1c

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{3x-21}{x-1} \leq 0 \quad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x-1)$ ist größer als Null:	*Fall 2: Der Nenner $(x-1)$ ist kleiner als Null*
$x-1>0$	$x-1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$3x-21 \leq 0\cdot(x-1)$	$3x-21 \geq 0\cdot(x-1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ 3x-21\leq 0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ 3x-21\geq 0 \end{array}\right|$$

❷Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 1.
In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir jeweils 21:

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ 3x-21\leq 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +1 \\ +21 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ 3x-21\geq 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +1 \\ +21 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ 3x\leq 21 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ 3x\geq 21 \end{array}\right|$$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 3:

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ 3x\leq 21 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :3 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ 3x\geq 21 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ x\leq 7 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ x\geq 7 \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung $\boxed{1<x\leq 7}$, das rechte System hat keine Lösung.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das halboffene Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(1,7]}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\{x\mid 1<x\leq 7\}}}$$

Lösung zu 1d

⓿ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{7x-21}{x-1} \geq 0 \quad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x-1)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(x-1)$ ist kleiner als Null
$x-1>0$	$x-1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$7x-21\geq 0\cdot(x-1)$	$7x-21\leq 0\cdot(x-1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ 7x-21\geq 0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ 7x-21\leq 0 \end{array}\right|$$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 1.
In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir jeweils 21:

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ 7x-21\geq 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +1 \\ +21 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ 7x-21\leq 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +1 \\ +21 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ 7x\geq 21 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ 7x\leq 21 \end{array}\right|$$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 7:

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ 7x\geq 21 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :7 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ 7x\leq 21 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ x\geq 3 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<1 \\ x\leq 3 \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung $\boxed{x\geq 3}$, das rechte System hat die Lösung $\boxed{x<1}$

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-\infty,1)\cup[3,\infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\{x \mid x<1 \text{ oder } x\geq 3\}}}$$

Lösung zu 1e

⓿ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} > 3 \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x+1)$ ist größer als Null:	*Fall 2: Der Nenner $(x+1)$ ist kleiner als Null*
$x+1>0$	$x+1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$2x+6>3\cdot(x+1)$	$2x+6<3\cdot(x+1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ 2x+6>3\cdot(x+1) \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ 2x+6<3\cdot(x+1) \end{array}\right|$$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 1, in den beiden unteren Ungleichugnen multiplizieren wir die Klammer aus:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ 2x+6>3\cdot(x+1) \end{array}\right| \begin{array}{l} -1 \\ \text{ausmultiplizieren} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ 2x+6<3\cdot(x+1) \end{array}\right| \begin{array}{l} -1 \\ \text{ausmultiplizieren} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 2x+6>3x+3 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 2x+6<3x+3 \end{array}\right|$$

In den unteren Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 2x und 3:

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 2x+6>3x+3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -2x-3 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 2x+6<3x+3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -2x-3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 3>x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 3<x \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung: $\boxed{-1<x<3}$, das rechte System hat keine Lösung.

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-1,3)}} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{L=\{x\,|\,-1<x<3\}}}$$

Lösung zu 1f

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{6x+4}{4x} < 2 \quad D=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner (4x) ist größer als Null:	*Fall 2: Der Nenner (4x) ist kleiner als Null*
$4x > 0$	$4x < 0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:*
$6x+4 < 2\cdot 4x$	$6x+4 > 2\cdot 4x$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} 4x > 0 \\ 6x+4 < 2\cdot 4x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 4x < 0 \\ 6x+4 > 2\cdot 4x \end{array}\right|$$

❷Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 4,
in den beiden unteren Ungleichugnen subtrahieren wir jeweils 6x:

$$\left.\begin{array}{l} 4x > 0 \\ 6x+4 < 2\cdot 4x \end{array}\right|\begin{array}{l} :4 \\ -6x \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 4x < 0 \\ 6x+4 > 2\cdot 4x \end{array}\right|\begin{array}{l} :4 \\ -6x \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 4 < 2x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ 4 > 2x \end{array}\right|$$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 2,

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 4 < 2x \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ 4 > 2x \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ :2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 2 < x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 > x \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung: $\boxed{x > 2}$, das rechte System hat die Lösung $\boxed{x < 0}$.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x < 0 \text{ oder } x > 2\}}}$$

Lösung zu 1g

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+21}{2x+1} \geq 1 \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(2x+1)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(2x+1)$ ist kleiner als Null
$2x+1>0$	$2x+1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$3x+21 \geq 1\cdot(2x+1)$	$3x+21 \leq 1\cdot(2x+1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{l|} 2x+1>0 \\ 3x+21 \geq 1\cdot(2x+1) \end{array} \qquad \begin{array}{l|} 2x+1<0 \\ 3x+21 \leq 1\cdot(2x+1) \end{array}$$

❷Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir „1“, in den unteren „21“:

$$\begin{array}{l|l} 2x+1>0 & -1 \\ 3x+21 \geq 2x+1 & -21 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2x+1<0 & -1 \\ 3x+21 \leq 2x+1 & -21 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} 2x>-1 \\ 3x \geq 2x-20 \end{array} \qquad \begin{array}{l|} 2x<-1 \\ 3x \leq 2x-20 \end{array}$$

Die oberen Ungleichungen durch 2 dividieren, und in den unteren Ungleichungen 2x subtrahieren:

$$\begin{array}{l|l} 2x>-1 & :2 \\ 3x \geq 2x-20 & -2x \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2x<-1 & :2 \\ 3x \leq 2x-20 & -2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} x>\frac{-1}{2} \\ x \geq -20 \end{array} \qquad \begin{array}{l|} x<\frac{-1}{2} \\ x \leq -20 \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung: $\boxed{x>-\frac{1}{2}}$, das rechte System hat die Lösung $\boxed{x \leq -20}$.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-\infty,-20]\cup\left(-\tfrac{1}{2},\infty\right)}} \text{ bzw. } \underline{\underline{L=\left\{x \mid x \leq -20 \text{ oder } x>-\tfrac{1}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 1h

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{4x-4}{2x+3} \geq 2 \qquad D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(2x+3)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(2x+3)$ ist kleiner als Null
$2x+3>0$	$2x+3<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$4x-4\geq 2\cdot(2x+3)$	$4x-4\leq 2\cdot(2x+3)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3>0 \\ 4x-4\geq 2\cdot(2x+3) \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+3<0 \\ 4x-4\leq 2\cdot(2x+3) \end{array}\right|$$

❷Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „3“, die unteren multiplizieren wir aus:

$$\begin{array}{l|l} 2x+3>0 & -3 \\ 4x-4\geq 2\cdot(2x+3) & \text{ausmultiplizieren} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2x+3<0 & -3 \\ 4x-4\leq 2\cdot(2x+3) & \text{ausmultiplizieren} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x>-3 \\ 4x-4\geq 4x+6 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 2x<-3 \\ 4x-4\leq 4x+6 \end{array}\right|$$

Die oberen Ungleichungen durch 2 dividieren, und in den unteren Ungleichungen 4x subtrahieren:

$$\begin{array}{l|l} 2x>-3 & :2 \\ 4x-4\geq 4x+6 & -4x \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2x<-3 & :2 \\ 4x-4\leq 4x+6 & -4x \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>\frac{-3}{2} \\ -4\geq 6 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<\frac{-3}{2} \\ -4\leq 6 \end{array}\right|$$

Das linke System hat keine Lösung , das rechte System hat die Lösung $\boxed{x\leq -\frac{3}{2}}$.

❸Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)}} \text{ bzw. } \underline{\underline{L=\left\{x \mid x\leq -\tfrac{3}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 1i

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{2x+2} > 0}$$

Klammere im rechten Bruch die Zahl „2“ aus, und zwar im Zähler und im Nenner:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{2(3x-1)}{2(x+1)} > 0}$$

Kürze den rechten Bruch mit „2“:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} > 0}$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\boxed{\frac{2x+6-(3x-1)}{x+1} > 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\boxed{\frac{2x+6-3x+1}{x+1} > 0}$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\boxed{\frac{7-x}{x+1} > 0}$$

❸ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x+1)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(x+1)$ ist kleiner als Null
$x+1>0$	$x+1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$7-x>0\cdot(x+1)$	$7-x<0\cdot(x+1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ 7-x>0\cdot(x+1) \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ 7-x<0\cdot(x+1) \end{array}\right|$$

❹Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „1“, die unteren vereinfache wir:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ 7-x>0\cdot(x+1) \end{array}\right| -1 \qquad \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ 7-x<0\cdot(x+1) \end{array}\right| -1$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 7-x>0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 7-x<0 \end{array}\right|$$

In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir x:

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 7-x>0 \end{array}\right| +x \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 7-x<0 \end{array}\right| +x$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 7>x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 7<x \end{array}\right|$$

Das linke System hat hat die Lösung $\boxed{-1<x<7}$, das rechte System hat keine Lösung

❺Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$\underline{\underline{L=(-1,7)}}$ bzw. $\underline{\underline{L=\{x\,|\,-1<x<7\}}}$

Lösung zu 1j

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6x-6}{3x+3} \geq 0$$

Klammere im rechten Bruch die Zahl „3“ aus, und zwar im Zähler und im Nenner:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{3(2x-2)}{3(x+1)} \geq 0$$

Kürze den rechten Bruch mit „3“:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{2x-2}{x+1} \geq 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+2-(2x-2)}{x+1} \geq 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{2x+2-2x+2}{x+1} \geq 0$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{4}{x+1} \geq 0$$

❸ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x+1)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(x+1)$ ist kleiner als Null
$x+1>0$	$x+1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$4>0\cdot(x+1)$	$4<0\cdot(x+1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\begin{array}{l|} x+1>0 \\ 4>0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l|} x+1<0 \\ 4<0 \\ \hline \end{array}$$

❹Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „1“:

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ 4>0 \end{array}\right| -1 \qquad \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ 4<0 \end{array}\right| -1$$

$$\left.\begin{array}{l} x>-1 \\ 4>0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ 4<0 \end{array}\right|$$

Das linke System hat hat die Lösung $\boxed{x>-1}$.

Das rechte System hat keine Lösung, denn 4 ist nicht kleiner als Null.

❺Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(-1,\infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\{x \mid x>-1\}}}$$

Lösung zu 1k

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0,3\}}$$

❶ Versuche die Brüche zu kürzen:

Kürze den linken Bruch mit x:

$$\boxed{\frac{3}{2} \geq \frac{6x-18}{4x-12}}$$

Klammere rechten Bruch die Zahl „6“ im Zähler aus, und die Zahl „4“ im Nenner:

$$\boxed{\frac{3}{2} \geq \frac{6(x-3)}{4(x-3)}}$$

Kürze den rechten Bruch mit x–3:

$$\boxed{\frac{3}{2} \geq \frac{6}{4}}$$

Kürze den rechten Bruch mit 2:

$$\boxed{\frac{3}{2} \geq \frac{2}{2}}$$

❷ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Diese Ungleichung ist für alle Zahlen aus R wahr. Allerdings müssen wir beachten, dass die Zahlen 0 und 3 nicht im Definitionsbereich der gegebenen Ungleichung liegen. Daher lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0,3\}\}}}$$

Lösung zu 1l

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+15}{2x-2} \geq \frac{6x+3}{4x-4} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{4x-4} \geq 0$$

Klammere im Nenner des rechten Bruch die Zahl „2“ aus:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Erweitere den linken Bruch mit 2:

$$\frac{2(3x+15)}{2(2x-2)} - \frac{6x+3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2(3x+15)-(6x+3)}{2(2x-2)} \geq 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{2(3x+15)-6x-3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Multipliziere jetzt die Klammer im Zähler aus:

$$\frac{6x+30-6x-3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{27}{2(2x-2)} \geq 0$$

❸ Vereinfache den Bruch

Klammer im Nenner 2 aus der Klammer aus:

$$\frac{27}{4(x-1)} \geq 0$$

Multipliziere die Ungleichung mit $\frac{4}{27}$:

$$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{4(x-1)} \geq 0 \cdot \frac{4}{27}$$

Kürze den Bruch auf der linken Seite der Ungleichung. Die rechte Seite bleibt Null:

$$\boxed{\frac{1}{x-1} \geq 0}$$

❹Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(x-1)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(x-1)$ ist kleiner als Null
$x-1>0$	$x-1<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$1 \geq 0 \cdot (x-1)$	$1 \leq 0 \cdot (x-1)$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ 1 \geq 0 \end{matrix}\right| \qquad \left.\begin{matrix} x-1<0 \\ 1 \leq 0 \end{matrix}\right|$$

❺Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils „1“:

$$\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ 1 \geq 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} +1 \\ \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} x-1<0 \\ 1 \leq 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} +1 \\ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x>1 \\ 1 \geq 0 \end{matrix}\right| \qquad \left.\begin{matrix} x<1 \\ 1 \leq 0 \end{matrix}\right|$$

Das linke System hat hat die Lösung $\boxed{x>1}$.

Das rechte System hat keine Lösung, denn 1 ist nicht kleiner oder gleich Null.

❻Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (1,\infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x>1\}}}$$

Lösung zu 1m

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2},-\frac{4}{10}\right\}}$$

❶ Versuche die Brüche zu kürzen:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\boxed{\frac{4x+2}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Klammere im Zähler des linken Bruches die Zahl „2“ aus:

$$\boxed{\frac{2(2x+1)}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Kürze im linken Bruch den Term 2x+1:

$$\boxed{2 - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Klammere im Nenner des rechten Bruches die Zahl „2“ aus:

$$\boxed{2 - \frac{5x+2}{2(5x+2)} < 0}$$

Kürze im Bruch den Term 5x+2:

$$\boxed{2 - \frac{1}{2} < 0}$$

❷ Lösungsmenge angeben

Weil die Ungleichung nicht wahr werden kann, hat die gegebene Bruchungleichung keine Lösung:

$\underline{\underline{L = \{\}}}$ bzw. $\underline{\underline{L = \varnothing}}$

Lösung zu 1n

⓿Gegebene Bruchungleichung:
Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:
Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{6x+9} < 0$$

Klammere im Nenner des rechten Bruch die Zahl „3“ aus:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Erweitere den linken Bruch mit 3:

$$\frac{3(x+2)}{3(2x+3)} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{3(x+2)-(5x+2)}{3(2x+3)} < 0$$

❷Vereinfache den Zähler:
Löse die Klammern im Zähler auf. Beim Auflösen der rechten Klammer muss man beachten, dass man die Rechenzeichen in der Klammer umdrehen muss, weil ein MINUS vor der Klammer steht:

$$\frac{3x+6-5x-2}{3(2x+3)} < 0$$

Vereinfache den Zähler weiter: Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{4-2x}{3(2x+3)} < 0$$

❸ Vereinfache den Nenner

Multipliziere die Klammer im Nenner aus:

$$\boxed{\frac{4-2x}{6x+9}<0}$$

❹Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(6x+9)$ ist größer als Null:	Fall 2: Der Nenner $(6x+9)$ ist kleiner als Null
$6x+9>0$	$6x+9<0$
Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:	*Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nennerumgedreht werden:*
$4-2x<0\cdot 6x+9$	$4-2x>0\cdot 6x+9$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\left.\begin{array}{l} 6x+9>0 \\ 4-2x<0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 6x+9<0 \\ 4-2x>0 \end{array}\right|$$

❺Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „9“.
In den beiden unterren Ungleichungen addieren wir jeweils „2x“:

$$\left.\begin{array}{l} 6x–9>0 \\ 4-2x<0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -9 \\ +2x \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 6x–9<0 \\ 4-2x>0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -9 \\ +2x \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x>-9 \\ 4<2x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} 6x<-9 \\ 4>2x \end{array}\right|$$

Die oberen Ungleichngen dividieren wir durch 6, die unteren durch 2:

$$\left.\begin{array}{l} x>-\frac{9}{6} \\ 2<x \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} x<-\frac{9}{6} \\ 2>x \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung $\boxed{x>2}$, das rechte hat die Lösung $x<-\frac{9}{6}$ bzw. $\boxed{x<-\frac{3}{2}}$.

❻Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden die Intervalle auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)\cup\left(2,\infty\right)}} \text{ bzw. } \underline{\underline{L=\left\{x\mid x<-\tfrac{3}{2}\ oder\ x>2\right\}}}$$

Lösung zu 2a

⓿Gegebene Bruchungleichung:
Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} > 3 \qquad D=\mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:
Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - 3 > 0}$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3(x+1)}{(x+1)} > 0}$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{2x+6-3(x+1)}{x+1} > 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:
Wir multiplizieren die Klammer im Zähler aus:

$$\boxed{\frac{2x+6-3x-3}{x+1} > 0}$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\boxed{\frac{3-x}{x+1} > 0}$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an
Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind, oder wenn beide kleiner als Null sind.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left.\begin{array}{l} 3-x>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| \quad oder \quad \left.\begin{array}{l} 3-x<0 \\ x+1<0 \end{array}\right|$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.
In den oberen Ungleichungen müssen wir x addieren, und in den unteren 1 subtrahieren:

$$\left.\begin{array}{l} 3-x>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| \begin{array}{l} +x \\ -1 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{array}{l} 3-x<0 \\ x+1<0 \end{array}\right| \begin{array}{l} +x \\ -1 \end{array}$$

Es ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} 3>x \\ x>-1 \end{array}\right| \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{array}{l} 3<x \\ x<-1 \end{array}\right|$$

Das rechte System hat keine Lösung, denn eine Zahl x kann nicht größer als 3 und gleichzeitig kleiner als –1 sein. Das linke System hat die Lösung:

$$-1<x<3$$

Weil dieses Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-1,3\right)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\left\{x \mid -1<x<3\right\}}}$$

Lösung zu 2b

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{6x+4}{4x} < 2 \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{6x+4}{4x} - 2 < 0}$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\boxed{\frac{6x+4}{4x} - \frac{2\cdot 4x}{4x} < 0}$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{6x+4-8x}{4x} < 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\boxed{\frac{4-2x}{4x} < 0}$$

Klammere „2“ aus:

$$\boxed{\frac{2(2-x)}{2\cdot 2x} < 0}$$

Kürze mit 2:

$$\boxed{\frac{2-x}{2x} < 0}$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist kleiner als Null, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left.\begin{array}{r} 2-x>0 \\ 2x<0 \end{array}\right| \quad oder \quad \left.\begin{array}{r} 2-x<0 \\ 2x>0 \end{array}\right|$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.
In den oberen Ungleichungen müssen wir x addieren, und in den unteren 1 subtrahieren:

$$\left.\begin{array}{r} 2-x>0 \\ 2x<0 \end{array}\right| \begin{array}{l} +x \\ :2 \end{array} \qquad oder \qquad \left.\begin{array}{r} 2-x<0 \\ 2x>0 \end{array}\right| \begin{array}{l} +x \\ :2 \end{array}$$

Es ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} 2>x \\ x<0 \end{array}\right| \qquad oder \qquad \left.\begin{array}{l} 2<x \\ x>0 \end{array}\right|$$

Das linke System hat die Lösung x<0, das rechte System hat die Lösung x>2.

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \{x \mid -\infty < x < 0 \ oder \ 2 < x < \infty\}}}$$

Lösung zu 2c

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{3x+21}{2x+1} \geq 1 \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{3x+21}{2x+1} - 1 \geq 0}$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\boxed{\frac{3x+21}{2x+1} - \frac{1 \cdot (2x+1)}{(2x+1)} \geq 0}$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{3x+21-(2x+1)}{2x+1} \geq 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir lösen die Klammer auf. Weil ein „Minus“ vor der Klammer steht, müssen wir alle Rechenzeichen umdrehen:

$$\boxed{\frac{3x+21-2x-1}{2x+1} \geq 0}$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\boxed{\frac{x+20}{2x+1} \geq 0}$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
> oder wenn beide kleiner als Null sind.
> Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} x+20>0 \\ 2x+1>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x+20<0 \\ 2x+1<0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad x+20=0$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme und die einzelne Gleichung lösen.

$$\left.\begin{array}{l} x+20>0 \\ 2x+1>0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -20 \\ -1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x+20<0 \\ 2x+1<0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -20 \\ -1 \end{array} \quad \text{oder} \quad x+20=0$$

In den oberen Ungleichungen müssen wir 20 subtrahieren, und in den unteren 1:
Die einzelne Gleichung kann man sofort lösen, indem man 20 auf beiden Seiten subtrahiert:

$$\left.\begin{array}{l} x>-20 \\ 2x>-1 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x<-20 \\ 2x<-1 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad x=-20$$

In den unteren Ungleichungen müssen wir nun durch 2 teilen:

$$\left.\begin{array}{l} x>-20 \\ x>\frac{-1}{2} \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} x<-20 \\ x<\frac{-1}{2} \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad x=-20$$

Das linke System hat die Lösung:

$$x>-\frac{1}{2}$$

Das rechte System hat die Lösung:

$$x<-20$$

Die einzelne Gleichung hatten wir schon gelöst:

$$x=-20$$

Weil alle drei Lösungen im Definitionsbereich liegen, lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-\infty,-20\right]\cup\left(-\tfrac{1}{2},\infty\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid x\leq-20 \text{ oder } x>-\tfrac{1}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 2d

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{4x-4}{2x+3} \geq 2 \qquad D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{4x-4}{2x+3} - 2 \geq 0}$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\boxed{\frac{4x-4}{2x+3} - \frac{2(2x+3)}{(2x+3)} \geq 0}$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{4x-4-2(2x+3)}{2x+3} \geq 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die Klammer im Zähler aus:

$$\boxed{\frac{4x-4-4x-6}{2x+3} \geq 0}$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\boxed{\frac{-10}{2x+3} \geq 0}$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
> oder wenn beide kleiner als Null sind.
> Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} -10>0 \\ 2x+3>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} -10<0 \\ 2x+3<0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad -10=0$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung lösen.

Das linke Ungleichungssystem hat keine Lösung (weil –10 nicht größer als Null ist).
Die Gleichung hat ebenfalls keine Lösung. Wir müssen also nur das Ungleichungssystem in der Mitte lösen. Dazu subtrahieren wir 3 auf beiden Seiten der unteren Ungleichung:

$$\left.\begin{array}{l} -10>0 \\ 2x+3>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} -10<0 \\ 2x+3<0 \end{array}\right| -3 \quad \text{oder} \quad -10=0$$

Jetzt teilen wir die untere Ungleichung im mittleren System durch 2

$$\left.\begin{array}{l} -10>0 \\ 2x+3>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} -10<0 \\ 2x<-3 \end{array}\right| :2 \quad \text{oder} \quad -10=0$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} -10>0 \\ 2x+3>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} -10<0 \\ x<-\frac{3}{2} \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad -10=0$$

Wie gesagt, haben das linke System und die rechte Gleichung keine Lösung.

Die Lösung des Systems in der Mitte kann man jetzt ablesen. Die obere Ungleichung ist immer wahr, und die untere ist wahr, wenn x kleiner als –3/2 ist.
Das Ergebnis ist also das Intervall:

$$x<-\frac{3}{2}$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid x<-\tfrac{3}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 2e

⓿Gegebene Bruchungleichung:
Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:
Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{2x+2} > 0}$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „2" im Zähler und im Nenner ausklammern:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{2(3x-1)}{2(x+1)} > 0}$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „2" kürzen:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} > 0}$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\boxed{\frac{2x+6-(3x-1)}{x+1} > 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:
Wir lösen die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, müssen wir die Rechenzeichen in der Klammer umdrehen:

$$\boxed{\frac{2x+6-3x+1}{x+1} > 0}$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\boxed{\frac{7-x}{x+1} > 0}$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an
Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind, oder wenn beide kleiner als Null sind.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left.\begin{array}{l} 7-x>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{array}{l} 7-x<0 \\ x+1<0 \end{array}\right|$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.
Dazu addieren wir in den oberen Ungleichungen x, und subtrahieren in den unteren Ungleichungen die Zahl 1:

$$\left.\begin{array}{l} 7-x>0 \\ x+1>0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +x \\ -1 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{array}{l} 7-x<0 \\ x+1<0 \end{array}\right|\begin{array}{l} +x \\ -1 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} 7>x \\ x>-1 \end{array}\right| \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{array}{l} 7<x \\ x<-1 \end{array}\right|$$

Das rechte System hat keine Lösung, denn x kann nicht größer als 7 und gleichzeitig kleiner als –1 sein. Es bleibt also nur das linke System übrig:

$$\left.\begin{array}{l} 7>x \\ x>-1 \end{array}\right|$$

Das übrig gebliebene Ungleichungssystem hat als Lösung:

$$-1<x<7$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-1,7\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid -1<x<7\right\}}}$$

Lösung zu 2f

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6x-6}{3x+3} \geq 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „6“ im Zähler und die Zahl „3“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6(x-1)}{3(x+1)} \geq 0$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „3“ kürzen:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{2(x-1)}{(x+1)} \geq 0$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+2-2(x-1)}{x+1} \geq 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Im Zähler multiplizieren wir die Klammer aus:

$$\frac{2x+2-2x+2}{x+1} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{4}{x+1} \geq 0$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
> oder wenn beide kleiner als Null sind.
> Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} 4>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| \quad oder \quad \left.\begin{array}{l} 4<0 \\ x+1<0 \end{array}\right| \quad oder \quad 4=0$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen und die Gleichung lösen. Die Gleichung hat keine Lösung, denn 4 ist niemals gleich Null. Das rechte System hat auch keine Lösung, denn 4 ist niemals kleiner als Null:

$$\left.\begin{array}{l} 4>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| \quad oder \quad \left.\begin{array}{l} 4<0 \\ x+1<0 \end{array}\right| \quad oder \quad 4=0$$

Es bleibt also nur das linke Ungleichungssystem übrig. Um es zu lösen, isolieren wir in der unteren Ungleichung x, indem wir auf beiden Seiten 1 subtrahieren:

$$\left.\begin{array}{l} 4>0 \\ x+1>0 \end{array}\right| -1$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} 4>0 \\ x>-1 \end{array}\right|$$

Wir lesen die Lösung des Systems ab: Die obere Ungleichung ist immer wahr. Die untere Ungleichung ist nur wahr, wenn x größer als –1. Die Lösung des Systems lautet also:

$$x>-1$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-1,\infty\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid -1<x\right\}}}$$

Lösung zu 2g

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0,3\}}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} - \frac{6x-18}{4x-12} \geq 0}$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „6“ im Zähler und die Zahl „4“ im Nenner ausklammern:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} - \frac{6(x-3)}{4(x-3)} \geq 0}$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „2“ kürzen:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} - \frac{3(x-3)}{2(x-3)} \geq 0}$$

Außerdem können wir im rechten Bruch auch noch mit (x–3) kürzen:

$$\boxed{\frac{3x}{2x} - \frac{3}{2} \geq 0}$$

Im linken Bruch können wir mit x kürzen:

$$\boxed{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \geq 0}$$

Die Brüche sind nun gleichnamig (haben gleiche Nenner) und wir können sie auf einen Bruchstrich bringen (man sieht aber auch schon, dass die linke Seite zu Null wird):

$$\boxed{\frac{3-3}{2} \geq 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Vereinfache den Zähler:

$$\boxed{\frac{0}{2} \geq 0}$$

Vereinfache linke Seite:

$$\boxed{0 \geq 0}$$

❸ Stelle die Lösungsmenge auf:

Diese Ungleichung ist für alle Zahlen aus R wahr. Allerdings müssen wir beachten, dass die Zahlen 0 und 3 nicht im Definitionsbereich der gegebenen Ungleichung liegen. Daher lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0,3\}\}}}$$

Lösung zu 2h

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+15}{2x-2} \geq \frac{6x+3}{4x-4} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{4x-4} \geq 0$$

Im linken Bruch können wir die Zahl „3“ im Zähler und die Zahl „2“ im Nenner ausklammern.

$$\frac{3(x+5)}{2(x-1)} - \frac{6x+3}{4x-4} \geq 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „3“ im Zähler und die Zahl „4“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{3(x+5)}{2(x-1)} - \frac{3(2x+1)}{4(x-1)} \geq 0$$

Jetzt erweitern wir den linken Bruch mit 2, sodass die Brüche gleichnamig werden:

$$\frac{6(x+5)}{4(x-1)} - \frac{3(2x+1)}{4(x-1)} \geq 0$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{6(x+5)-3(2x+1)}{4(x-1)} \geq 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Im Zähler multiplizieren wir die Klammer aus:

$$\frac{6x+30-6x-3}{4(x-1)} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{27}{4(x-1)} \geq 0$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

> Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
> oder wenn beide kleiner als Null sind.
> Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} 27>0 \\ 4(x-1)>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} 27<0 \\ 4(x-1)<0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad 27=0$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen und die Gleichung lösen.
Die Gleichung hat keine Lösung, denn 27 ist niemals gleich Null.
Das rechte System hat auch keine Lösung, denn 27 ist niemals kleiner als Null:

$$\left.\begin{array}{l} 27>0 \\ 4(x-1)>0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} 27<0 \\ 4(x-1)<0 \end{array}\right| \quad \text{oder} \quad 27=0$$

Es bleibt also nur das linke Ungleichungssystem übrig. Um es zu lösen, isolieren wir in der unteren Ungleichung x, indem wir zunächst beiden Seiten durch 4 dividieren:

$$\left.\begin{array}{l} 27>0 \\ 4(x-1)>0 \end{array}\right| :4$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} 27>0 \\ x-1>0 \end{array}\right|$$

In der unteren Ungleichung addieren wir auf beiden Seiten „1“ und erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} 27>0 \\ x>1 \end{array}\right|$$

Wir lesen die Lösung des Systems ab: Die obere Ungleichung ist immer wahr. Die untere Ungleichung ist nur wahr, wenn x größer als 1. Die Lösung des Systems lautet also:

$$x>1$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=(1,\infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\{x \mid x>1\}}}$$

Lösung zu 2i

⓿ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right\}}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir versuchen zunächst, beide Brüche zu kürzen, um sie leichter auf einen Bruchstrich zu bringen.

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\boxed{\frac{4x+2}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Im linken Bruch können wir im Zähler die Zahl „2“ ausklammern:

$$\boxed{\frac{2(2x+1)}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Dadurch können wir im linken Bruch mit (2x+1) kürzen:

$$\boxed{2 - \frac{5x+2}{10x+4} < 0}$$

Im anderen Bruch können im Nenner die Zahl 2 ausklammern:

$$\boxed{2 - \frac{5x+2}{2(5x+2)} < 0}$$

Dadurch können wir den Bruch mit (5x+2) kürzen:

$$\boxed{2 - \frac{1}{2} < 0}$$

Vereinfachen:

$$\boxed{\frac{3}{2} < 0}$$

Weil diese Ungleichung keine Lösung hat, hat auch die gegebene Ungleichung keine Lösung:

$$\underline{\underline{L = \varnothing}} \qquad \text{oder anders geschrieben:} \qquad \underline{\underline{L = \{\}}}$$

Lösung zu 2j

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{3}{2}\right\}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen beide Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{6x+9} < 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „3" im Nenner ausklammern:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Wenn wir jetzt den linken Bruch mit 3 erweitern, dann haben beide Brüche den gleichen Nenner:

$$\frac{3(x+2)}{3(2x+3)} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Weil jetzt beide Brüche den gleichen Nenner haben, kann man sie einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{3(x+2)-(5x+2)}{3(2x+3)} < 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die linke Klammer im Zähler aus, und lösen die rechte Klammer auf:

$$\frac{3x+6-5x-2}{3(2x+3)} < 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{4-2x}{3(2x+3)} < 0$$

Klammere im Zähler „2" aus:

$$\frac{2(2-x)}{3(2x+3)} < 0$$

Multipliziere die Ungleichung mit 3/2 und kürze dann:

$$\frac{2-x}{2x+3} < 0$$

❸Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist kleiner als Null, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left.\begin{matrix} 2-x>0 \\ 2x+3<0 \end{matrix}\right| \quad oder \quad \left.\begin{matrix} 2-x<0 \\ 2x+3>0 \end{matrix}\right|$$

❹Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen. Dazu addieren wir in den oberen Ungleichungen x, und die unteren Ungleichungen subtrahieren wir 3:

$$\left.\begin{matrix} 2-x>0 \\ 2x+3<0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} +x \\ -3 \end{matrix} \quad oder \quad \left.\begin{matrix} 2-x<0 \\ 2x+3>0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} +x \\ -3 \end{matrix}$$

Wir erhalten:

$$\left.\begin{matrix} 2>x \\ 2x<-3 \end{matrix}\right| \quad oder \quad \left.\begin{matrix} 2<x \\ 2x>-3 \end{matrix}\right|$$

Die unteren Ungleichungen müssen durch 2 dividieren:

$$\left.\begin{matrix} 2>x \\ x<\frac{-3}{2} \end{matrix}\right| \quad oder \quad \left.\begin{matrix} 2<x \\ x>\frac{-3}{2} \end{matrix}\right|$$

Das linke System hat als Lösung:

$$x<-\frac{3}{2}$$

Das rechte System hat die Lösung:

$$x>2$$

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden die Intervalle auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)\cup\left(2,\infty\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L=\left\{x \mid x<-\tfrac{3}{2}\ oder\ x>2\right\}}}$$

Lösung zu 3a

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{3x-2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\tfrac{2}{3}\right\}}$$

❶Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die linke Seite:

$$\boxed{\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{3x-2} > 0}$$

Wir berechnen einen gemeinsamen Nenner. Einen gemeinsamen Nenner findet man z.B. dadurch, dass man beide Nenner miteinander multipliziert:

$$\boxed{(x+1)\cdot(3x-2)}$$

Wir bringen beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner, indem wir die Brüche erweitern:

$$\boxed{\frac{(2x+6)\cdot(3x-2)}{(x+1)\cdot(3x-2)} - \frac{(6x-2)\cdot(x+1)}{(3x-2)\cdot(x+1)} > 0}$$

Weil die Brüche den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{(2x+6)\cdot(3x-2)-(6x-2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(3x-2)} > 0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die Klammern im Zähler aus:

$$\boxed{\frac{10x-10}{(x+1)\cdot(3x-2)} > 0}$$

Im Zähler können wir die Zahl „10“ ausklammern:

$$\boxed{\frac{10\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(3x-2)} > 0}$$

Teile die Ungleichung durch 10:

$$\boxed{\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(3x-2)} > 0}$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

$$\boxed{\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(3x-2)}\cdot\left[(x+1)\cdot(3x-2)\right]^2>0\cdot\left[(x+1)\cdot(3x-2)\right]^2}$$

Die rechte Seite bleibt Null:

$$\boxed{\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(3x-2)}\cdot\left[(x+1)\cdot(3x-2)\right]^2>0}$$

Vereinfache die linke Seite: Ein Bruch wird mit einem Term multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit dem Term multipliziert:

$$\boxed{\frac{(x-1)\cdot\left[(x+1)\cdot(3x-2)\right]^2}{(x+1)\cdot(3x-2)}>0}$$

Im Zähler: Auf die eckige Klammer wenden wir das Potenzgesetz 2a an: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

$$\boxed{\frac{(x-1)\cdot(x+1)^2\cdot(3x-2)^2}{(x+1)\cdot(3x-2)}>0}$$

Kürze den Bruch mit (x+1) und (3x–2):

$$\boxed{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(3x-2)>0}$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung

Zunächst verwandeln wir die Faktoren in Linearfaktoren, d.h. die Faktoren von x müssen gleich „1“ sein. Dazu klammern wir aus der rechten Klammer die Zahl „3“ aus:

$$\boxed{(x-1)\cdot(x+1)\cdot 3\left(x-\frac{2}{3}\right)>0}$$

Wir teilen die Ungleichung durch 3, sodass der ausgeklammerte Faktor entfällt:

$$\boxed{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)>0}$$

Jetzt legen wir eine Vorzeichentabelle an:

Intervall:	**(–∞,–1)**	**$(-1,\frac{2}{3})$**	**$(\frac{2}{3},1)$**	**(1, ∞)**
Vorzeichen von $(x+1)$:	–	+	+	+
Vorzeichen von $\left(x-\frac{2}{3}\right)$:	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x+1)(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$:	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen $(-1, \frac{2}{3})$ und $(1,\infty)$ ist die linke Seite der Ungleichung positiv, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Das Ergebnis lautet also:

$$L=\left(-1,\tfrac{2}{3}\right)\cup\left(1,\infty\right) \quad \text{bzw.} \quad L=\ -1<x<\tfrac{2}{3}\ \ \vee\ \ x>1$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.

Lösung zu 3b

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+15}{2x-2} > \frac{6x+3}{4x-10} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\left\{1,\tfrac{5}{2}\right\}$$

❶Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die linke Seite:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{4x-10} > 0$$

Wir berechnen einen gemeinsamen Nenner. Einen gemeinsamen Nenner findet man zum Beispiel dadurch, dass man beide Nenner miteinander multipliziert:

$$(2x-2)\cdot(4x-10)$$

Wir bringen beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner, indem wir die Brüche erweitern:

$$\frac{(3x+15)\cdot(4x-10)}{(2x-2)\cdot(4x-10)} - \frac{(6x+3)\cdot(2x-2)}{(4x-10)\cdot(2x-2)} > 0$$

Weil die Brüche den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{(3x+15)\cdot(4x-10)-(6x+3)\cdot(2x-2)}{(2x-2)\cdot(4x-10)} > 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die beiden linken und die beiden rechten Klammern im Zähler jeweils aus:

$$\frac{12x^2+30x-150-(12x^2-6x-6)}{(2x-2)\cdot(4x-10)} > 0$$

Weil ein „Minus“ vor der Klammer steht, müssen wir alle Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{12x^2+30x-150-12x^2+6x+6}{(2x-2)\cdot(4x-10)} > 0$$

Zähler vereinfachen (gleiche Terme zusammenfassen):

$$\frac{36x-144}{(2x-2)\cdot(4x-10)} > 0$$

Im Zähler können wir die Zahl „36“ ausklammern. Im Nenner können wir aus beiden Klammer jeweils die „2“ ausklammern:

$$\frac{36(x-4)}{2\cdot(x-1)\cdot 2(2x-5)} > 0$$

Wir kürzen die „36“ im Zähler mit „2·2=4“ im Nenner:

$$\frac{9(x-4)}{(x-1)\cdot(2x-5)} > 0$$

Teile die Ungleichung durch 9, damit der konstante Faktor „9“ verschwindet:

$$\frac{(x-4)}{(x-1)\cdot(2x-5)} > 0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

$$\boxed{\frac{(x-4)}{(x-1)\cdot(2x-5)}\cdot[(x-1)\cdot(2x-5)]^2>0\cdot[(x-1)\cdot(2x-5)]^2}$$

Die rechte Seite bleibt Null:

$$\boxed{\frac{(x-4)}{(x-1)\cdot(2x-5)}\cdot[(x-1)\cdot(2x-5)]^2>0}$$

Vereinfache die linke Seite: Ein Bruch wird mit einem Term multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit dem Term multipliziert:

$$\boxed{\frac{(x-4)\cdot[(x-1)\cdot(2x-5)]^2}{(x-1)\cdot(2x-5)}>0}$$

Im Zähler: Auf die eckige Klammer wenden wir das Potenzgesetz 2a an: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

$$\boxed{\frac{(x-4)\cdot(x-1)^2\cdot(2x-5)^2}{(x-1)\cdot(2x-5)}>0}$$

Kürze den Bruch mit (x–1) und (2x–5):

$$\boxed{(x-4)\cdot(x-1)\cdot(2x-5)>0}$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung

Zunächst verwandeln wir die Faktoren in Linearfaktoren, d.h. die Faktoren von x müssen gleich „1“ sein. Dazu klammern wir aus der rechten Klammer die Zahl „2“ aus:

$$\boxed{(x-4)\cdot(x-1)\cdot 2\left(x-\frac{5}{2}\right)>0}$$

Wir teilen die Ungleichung durch 2, sodass der ausgeklammerte Faktor entfällt:

$$\boxed{(x-4)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)>0}$$

Jetzt legen wir eine Vorzeichentabelle an:

Intervall:	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2},4\right)$	$(4,\infty)$
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	+	+	+
Vorzeichen von $\left(x-\frac{5}{2}\right)$:	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-4)$:	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x-4)(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$:	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen $(1,\frac{5}{2})$ und $(4,\infty)$ ist die linke Seite der Ungleichung positiv, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Das Ergebnis lautet also:

$$\underline{\underline{L=\left(1,\tfrac{5}{2}\right)\cup(4,\infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L=\ 1<x<\tfrac{5}{2}\ \ \vee\ \ x>4}}$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.

Lösung zu 3c

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+9}{x-1} \geq \frac{6x+1}{3x-5} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{1, \tfrac{5}{3}\right\}$$

❶Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die linke Seite:

$$\frac{2x+9}{x-1} - \frac{6x+1}{3x-5} \geq 0$$

Wir berechnen einen gemeinsamen Nenner. Einen gemeinsamen Nenner findet man zum Beispiel dadurch, dass man beide Nenner miteinander multipliziert:

$$(x-1)\cdot(3x-5)$$

Wir bringen beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner, indem wir die Brüche erweitern:

$$\frac{(2x+9)\cdot(3x-5)}{(x-1)\cdot(3x-5)} - \frac{(6x+1)\cdot(x-1)}{(3x-5)\cdot(x-1)} \geq 0$$

Weil die Brüche den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{(2x+9)\cdot(3x-5)-(6x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die beiden linken und die beiden rechten Klammern im Zähler jeweils aus:

$$\frac{6x^2+17x-45-\left[6x^2-5x-1\right]}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

Weil ein „Minus“ vor der Klammer steht, müssen wir alle Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{6x^2+17x-45-6x^2+5x+1}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

Zähler vereinfachen (gleiche Terme zusammenfassen):

$$\frac{22x-44}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

Im Zähler können wir die Zahl „22“ ausklammern:

$$\frac{22(x-2)}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

Teile die Ungleichung durch 22, damit der konstante Faktor „22“ verschwindet:

$$\frac{(x-2)}{(x-1)\cdot(3x-5)} \geq 0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

$$\frac{(x-2)}{(x-1)\cdot(3x-5)}\cdot\left[(x-1)\cdot(3x-5)\right]^2 \ge 0\cdot\left[(x-1)\cdot(3x-5)\right]^2$$

Die rechte Seite bleibt Null:

$$\frac{(x-2)}{(x-1)\cdot(3x-5)}\cdot\left[(x-1)\cdot(3x-5)\right]^2 \ge 0$$

Vereinfache die linke Seite: Ein Bruch wird mit einem Term multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit dem Term multipliziert:

$$\frac{(x-2)\cdot\left[(x-1)\cdot(3x-5)\right]^2}{(x-1)\cdot(3x-5)} \ge 0$$

Im Zähler: Auf die eckige Klammer wenden wir das Potenzgesetz 2a an: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)^2\cdot(3x-5)^2}{(x-1)\cdot(3x-5)} \ge 0$$

Kürze den Bruch mit (x–1) und (3x–5):

$$(x-2)\cdot(x-1)\cdot(3x-5)\ge 0$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung

Zunächst verwandeln wir die Faktoren in Linearfaktoren, d.h. die Faktoren von x müssen gleich „1“ sein. Dazu klammern wir aus der rechten Klammer die Zahl „3“ aus:

$$(x-2)\cdot(x-1)\cdot 3\left(x-\frac{5}{3}\right)\ge 0$$

Wir teilen die Ungleichung durch 3, sodass der ausgeklammerte Faktor entfällt:

$$(x-2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{5}{3}\right)\ge 0$$

Jetzt legen wir eine Vorzeichentabelle an:

Intervall bzw. Stelle:	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3},2\right)$	2	$(2,\infty)$
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	0	+	+	+	+	+
Vorzeichen von $\left(x-\frac{5}{3}\right)$:	–	–	–	0	+	+	+
Vorzeichen von $(x-2)$:	–	–	–	–	–	0	+
Vorzeichen von $(x-2)(x-1)\left(x-\frac{5}{3}\right)$	–	0	+	0	–	0	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen $[1,\frac{5}{3}]$ und $[2,\infty)$ ist die linke Seite der Ungleichung positiv oder Null, und somit ist die Ungleichung dort wahr.

Allerdings gehören 1 und $\frac{5}{3}$ **nicht** zum Definitionsbereich. Das Ergebnis lautet daher:

$$L=\left(1,\tfrac{5}{3}\right)\cup\left[2,\infty\right) \quad \text{bzw.} \quad L=\ 1<x<\tfrac{5}{3}\ \ \vee\ \ x\ge 2$$

Lösung zu 3d

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{6x+2}{4x+1} \le \frac{3x+10}{2x+5} \qquad D=\mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{5}{2}\right\}$$

❶Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die linke Seite:

$$\frac{6x+2}{4x+1} - \frac{3x+10}{2x+5} \le 0$$

Wir berechnen einen gemeinsamen Nenner. Einen gemeinsamen Nenner findet man zum Beispiel dadurch, dass man beide Nenner miteinander multipliziert:

$$(4x+1)\cdot(2x+5)$$

Wir bringen beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner, indem wir die Brüche erweitern:

$$\frac{(6x+2)\cdot(2x+5)}{(4x+1)\cdot(2x+5)} - \frac{(3x+10)\cdot(4x+1)}{(2x+5)\cdot(4x+1)} \le 0$$

Weil die Brüche den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{(6x+2)\cdot(2x+5)-(3x+10)\cdot(4x+1)}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \le 0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die beiden linken und die beiden rechten Klammern im Zähler jeweils aus:

$$\frac{12x^2+34x+10-\left[12x^2+43x+10\right]}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \le 0$$

Weil ein „Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{12x^2+34x+10-12x^2-43x-10}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \le 0$$

Zähler vereinfachen (gleiche Terme zusammenfassen):

$$\frac{-9x}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \le 0$$

Teile die Ungleichung durch –9, damit der konstante Faktor „–9" verschwindet. Beachte: Weil du durch eine negative Zahl dividierst, musst du das Ungleichheitszeichen umdrehen:

$$\frac{x}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \ge 0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

$$\frac{x}{(4x+1)\cdot(2x+5)}\cdot\left[(4x+1)\cdot(2x+5)\right]^2 \geq 0\cdot\left[(4x+1)\cdot(2x+5)\right]^2$$

Die rechte Seite bleibt Null:

$$\frac{x}{(4x+1)\cdot(2x+5)}\cdot\left[(4x+1)\cdot(2x+5)\right]^2 \geq 0$$

Vereinfache die linke Seite: Ein Bruch wird mit einem Term multipliziert, indem man den Zähler des Bruches mit dem Term multipliziert:

$$\frac{x\cdot\left[(4x+1)\cdot(2x+5)\right]^2}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \geq 0$$

Im Zähler: Auf die eckige Klammer wenden wir das Potenzgesetz 2a an: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$

$$\frac{x\cdot(4x+1)^2\cdot(2x+5)^2}{(4x+1)\cdot(2x+5)} \geq 0$$

Kürze den Bruch mit (4x+1) und (2x+5):

$$x\cdot(4x+1)\cdot(2x+5)\geq 0$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung

Zunächst verwandeln wir die Faktoren in Linearfaktoren, d.h. die Faktoren von x müssen gleich „1“ sein. Dazu klammern wir die Zahl „2“ bzw. die Zahl „4“ aus:

$$x\cdot 4\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot 2\left(x+\frac{5}{2}\right)\geq 0$$

Wir teilen die Ungleichung durch 8, sodass der ausgeklammerten Faktoren entfallen:

$$x\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)\geq 0$$

Jetzt legen wir eine Vorzeichentabelle an:

Intervall bzw. Stelle:	$\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$	$-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4},0\right)$	0	$(0,\infty)$
Vorzeichen von $\left(x+\frac{5}{2}\right)$:	–	0	+	+	+	+	+
Vorzeichen von $\left(x+\frac{1}{4}\right)$:	–	–	–	0	+	+	+
Vorzeichen von x:	–	–	–	–	–	0	+
Vorzeichen von $\left(x+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot x$	–	0	+	0	–	0	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen $[-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}]$ und $[0,\infty)$ ist die linke Seite der Ungleichung positiv oder Null, und somit ist die Ungleichung dort wahr.

Allerdings gehören $-\frac{5}{2}$ und $-\frac{1}{4}$ **nicht** zum Definitionsbereich. Das Ergebnis lautet daher:

$$L=\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)\cup\left[0,\infty\right)$$ bzw. $$L= -\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{4} \quad\vee\quad x\geq 0$$

Lösung zu 3e

⓿Gegebene Bruchungleichung:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}<\frac{3}{x-2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$$

❶Alle Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Terme auf die linke Seite, indem wir $\frac{3}{x-2}$ auf beiden Seiten subtrahieren:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}<0$$

Jetzt bringen wir die drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Zuerst müssen wir einen gemeinsamen Nenner finden. Dazu multiplizieren wir die drei Nenner miteinander:

$$Gemeinsamer\ Nenner: \quad (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

Jetzt erweitern wir die drei Brüche, sodass sie alle den gleichen Nenner haben:

$$\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}+\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}-\frac{3(x-3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

Nun können wir die drei Brüche auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\ +\ (x-3)\cdot(x-2)\ -\ 3(x-3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Nun müssen wir den Zähler vereinfachen. Im Zähler finden wir dreimal ein Produkt aus zwei Klammern. Wir multiplizieren diese Klammern miteinander:

$$\frac{2\cdot(x^2-3x+2)\ +\ (x^2-5x+6)\ -\ 3(x^2-4x+3)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

Jetzt lösen wir die Klammern auf. Dazu müssen wir die Klammern mit dem davorstehenden Faktor multiplizieren:

$$\frac{2x^2-6x+4\ +x^2-5x+6\ -3x^2+12x-9}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

Jetzt fassen wir gleiche Terme im Zähler zusammen:

$$\frac{x+1}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

Jetzt multiplizieren wir die Ungleichung mit dem Quadrat des Nenners.

$$\frac{x+1}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}\cdot\left[(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\right]^2<0\cdot\left[(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\right]^2$$

Die rechte Seite bleibt gleich Null. Auf der linken Seite führen wir die Multiplikation durch: Ein Term wird mit einem Bruch multipliziert, indem man den Term mit dem Zähler multipliziert:

$$\frac{(x+1)\cdot\left[(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\right]^2}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

Im Zähler benutzen wir jetzt das Potenzgesetz $(abc)^2=a^2b^2c^2 = a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}<0$$

Wir kürzen den Bruch:

$$\frac{(x+1)\cdot(x-3)\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-2)}}<0$$

Wir erhalten durch das Kürzen eine Algebraische Ungleichung:

$$(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)<0$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung

Wir ordnen die Faktoren:

$$(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)<0$$

Wir legen eine Tabelle an, um die Algebraische Ungleichung zu lösen:

Intervall:	**(–∞,–1)**	**(–1,1)**	**(1,2)**	**(2,3)**	**(3, ∞)**
Vorzeichen von $(x+1)$:	–	+	+	+	+
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	–	+	+	+
Vorzeichen von $(x-2)$:	–	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-3)$:	–	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$:	+	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen (–1,1) und (2,3) ist die linke Seite der Ungleichung negativ, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Das Ergebnis lautet also:

$$\underline{\underline{L=\ (-1,1)\cup(2,3)}}$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.

Lösung zu 3f

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3}{2x-8}+\frac{1}{2x-4}<\frac{2}{x-3} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{4,2,3\}$$

❶Alle Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Terme auf die linke Seite, indem wir $\frac{2}{x-3}$ auf beiden Seiten subtrahieren:

$$\frac{3}{2x-8}+\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x-3}<0$$

Jetzt bringen wir die drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Zuerst müssen wir einen gemeinsamen Nenner finden. Dazu multiplizieren wir die drei Nenner miteinander:

$$Gemeinsamer\ Nenner: \quad (2x-8)\cdot(2x-4)\cdot(x-3)$$

Jetzt erweitern wir die drei Brüche, sodass sie alle den gleichen Nenner haben:

$$\frac{3(2x-4)(x-3)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}+\frac{(2x-8)(x-3)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}-\frac{2(2x-8)(2x-4)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

Nun können wir die drei Brüche auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{3(2x-4)(x-3)\ +\ (2x-8)(x-3)\ -\ 2(2x-8)(2x-4)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Nun müssen wir den Zähler vereinfachen. Im Zähler finden wir dreimal ein Produkt aus zwei Klammern. Wir multiplizieren diese Klammern miteinander:

$$\frac{3(2x^2-10x+12)\ +\ (2x^2-14x+24)\ -\ 2(4x^2-24x+32)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

Jetzt lösen wir die Klammern auf. Dazu müssen wir die Klammern mit dem davorstehenden Faktor multiplizieren:

$$\frac{6x^2-30x+36+2x^2-14x+24-8x^2+48x-64}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

Jetzt fassen wir gleiche Terme im Zähler zusammen:

$$\frac{4x-4}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

Nun müssen wir den Zähler vereinfachen. Im
Jetzt multiplizieren wir die Ungleichung mit dem Quadrat des Nenners.

$$\frac{4x-4}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}\cdot\left[(2x-8)(2x-4)(x-3)\right]^2<0\cdot\left[(2x-8)(2x-4)(x-3)\right]^2$$

Die rechte Seite bleibt gleich Null. Auf der linken Seite führen wir die Multiplikation durch: Ein Term wird mit einem Bruch multipliziert, indem man den Term mit dem Zähler multipliziert:

$$\frac{(4x-4)\left[(2x-8)(2x-4)(x-3)\right]^2}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

Im Zähler benutzen wir jetzt das Potenzgesetz $(abc)^2 = a^2b^2c^2 = a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c$:

$$\frac{(4x-4)(2x-8)(2x-8)(2x-4)(2x-4)(x-3)(x-3)}{(2x-8)(2x-4)(x-3)}<0$$

Wir kürzen den Bruch:

$$\frac{(4x-4)(2x-8)\cancel{(2x-8)}(2x-4)\cancel{(2x-4)}(x-3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(2x-8)}\cancel{(2x-4)}\cancel{(x-3)}}<0$$

Wir erhalten durch das Kürzen eine Algebraische Ungleichung:

$$(4x-4)(2x-8)(2x-4)(x-3)<0$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung:

Aus den drei ersten Klammern kann man eine Konstante ausklammern:

$$4(x-1)2(x-4)2(x-2)(x-3)<0$$

Umstellen (Faktoren vertauschen):

$$16(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)<0$$

Die Konstante „16“ hat keinen Einfluß auf die Lösung, und kann fortfallen.
Gleichzeitig ordnen wir die Terme:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)<0$$

Wir legen eine Tabelle an, um die Algebraische Ungleichung zu lösen:

Intervall:	**(–∞,1)**	**(1,2)**	**(2,3)**	**(3,4)**	**(4,∞)**
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	+	+	+	+
Vorzeichen von $(x-2)$:	–	–	+	+	+
Vorzeichen von $(x-3)$:	–	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-4)$:	–	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$:	+	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen (1,2) und (3,4) ist die linke Seite der Ungleichung negativ, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Die Lösungsmenge lautet also:

$$\underline{\underline{L=(1,2)\cup(3,4)}}$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.

Lösung zu 3g

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\boxed{\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-1}<\frac{5}{x-2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{3,1,2\}}$$

❶Alle Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Terme auf die linke Seite, indem wir $\frac{5}{x-2}$ auf beiden Seiten subtrahieren:

$$\boxed{\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x-2}<0}$$

Jetzt bringen wir die drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Zuerst müssen wir einen gemeinsamen Nenner finden. Dazu multiplizieren wir die drei Nenner miteinander:

$$\text{Gemeinsamer Nenner}:\quad (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

Jetzt erweitern wir die drei Brüche, sodass sie alle den gleichen Nenner haben:

$$\boxed{\frac{3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}+\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}-\frac{5(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

Nun können wir die drei Brüche auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\boxed{\frac{3(x-1)\cdot(x-2)\;+\;2(x-2)\cdot(x-3)-5(x-1)\cdot(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

❷Vereinfache den Zähler:

Nun müssen wir den Zähler vereinfachen. Im Zähler finden wir dreimal ein Produkt aus zwei Klammern. Wir multiplizieren diese Klammern miteinander:

$$\boxed{\frac{3\left(x^2-3x+2\right)\;+\;2\left(x^2-5x+6\right)-5\left(x^2-4x+3\right)}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

Jetzt lösen wir die Klammern auf. Dazu müssen wir die Klammern mit dem davorstehenden Faktor multiplizieren:

$$\boxed{\frac{3x^2-9x+6\;+\;2x^2-10x+12\;-5x^2+20x-15}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

Jetzt fassen wir gleiche Terme im Zähler zusammen:

$$\boxed{\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

Jetzt multiplizieren wir die Ungleichung mit dem Quadrat des Nenners.

$$\boxed{\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\cdot\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]^2<0\cdot\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]^2}$$

Die rechte Seite bleibt gleich Null. Auf der linken Seite führen wir die Multiplikation durch: Ein Term wird mit einem Bruch multipliziert, indem man den Term mit dem Zähler multipliziert:

$$\boxed{\frac{(x+3)\cdot\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

Im Zähler benutzen wir jetzt das Potenzgesetz $(abc)^2 = a^2b^2c^2 = a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c$:

$$\boxed{\frac{(x+3)\cdot(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-3)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}<0}$$

Wir kürzen den Bruch:

$$\boxed{\frac{(x+3)\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-3)}}<0}$$

Wir erhalten durch das Kürzen eine Algebraische Ungleichung:

$$\boxed{(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)<0}$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung:

Wir legen eine Tabelle an, um die Algebraische Ungleichung zu lösen:

Intervall:	**(–∞,–3)**	**(–3,1)**	**(1,2)**	**(2,3)**	**(3, ∞)**
Vorzeichen von $(x+3)$:	–	+	+	+	+
Vorzeichen von $(x-1)$:	–	–	+	+	+
Vorzeichen von $(x-2)$:	–	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-3)$:	–	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)$:	+	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen (–3,1) und (2,3) ist die linke Seite der Ungleichung negativ, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Die Lösungsmenge lautet also:

$$\underline{\underline{L=(-3,1)\cup(2,3)}}$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.

Lösung zu 3h

⓿Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x+2}<\frac{1}{2x-6} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{2,-1,3\}$$

❶Alle Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Terme auf die linke Seite, indem wir $\frac{1}{2x-6}$ auf beiden Seiten subtrahieren:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{2x-6}<0$$

Jetzt bringen wir die drei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Zuerst müssen wir einen gemeinsamen Nenner finden. Dazu multiplizieren wir die drei Nenner miteinander:

$$\text{Gemeinsamer Nenner}: \quad (x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)$$

Jetzt erweitern wir die drei Brüche, sodass sie alle den gleichen Nenner haben:

$$\frac{1\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}-\frac{1\cdot(x-2)\cdot(2x-6)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}-\frac{1\cdot(x-2)\cdot(2x+2)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}<0$$

Nun können wir die drei Brüche auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{(2x+2)\cdot(2x-6)-(x-2)\cdot(2x-6)-(x-2)\cdot(2x+2)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}<0$$

❷Vereinfache den Zähler:

Nun müssen wir den Zähler vereinfachen. Im Zähler finden wir dreimal ein Produkt aus zwei Klammern. Wir multiplizieren diese Klammern miteinander:

$$\frac{(4x^2-8x-12)-(2x^2-10x+12)-(2x^2-2x-4)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}<0$$

Jetzt lösen wir die Klammern auf. Erinnere dich an die Regel zum Auflösen von Klammern: Steht ein Minus vor der Klammer, müssen die Rechenzeichen umgedreht werden:

$$\frac{4x^2-8x-12-2x^2+10x-12-2x^2+2x+4}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}<0$$

Jetzt fassen wir gleiche Terme im Zähler zusammen:

$$\frac{4x-20}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}<0$$

❸Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners und vereinfache:

Jetzt multiplizieren wir die Ungleichung mit dem Quadrat des Nenners.

$$\boxed{\frac{4x-20}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)}\cdot[(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)]^2 < 0\cdot[(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)]^2}$$

Die rechte Seite bleibt gleich Null. Auf der linken Seite führen wir die Multiplikation durch:
Ein Term wird mit einem Bruch multipliziert, indem man den Term mit dem Zähler multipliziert:

$$\boxed{\frac{(4x-20)\cdot[(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)]^2}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)} < 0}$$

Im Zähler benutzen wir jetzt das Potenzgesetz $(abc)^2 = a^2b^2c^2 = a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c$:

$$\boxed{\frac{(4x-20)\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)\cdot(2x-6)}{(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)} < 0}$$

Wir kürzen den Bruch:

$$\boxed{\frac{(4x-20)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(2x+2)\cdot\cancel{(2x+2)}\cdot(2x-6)\cdot\cancel{(2x-6)}}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(2x+2)}\cdot\cancel{(2x-6)}} < 0}$$

Wir erhalten durch das Kürzen eine Algebraische Ungleichung:

$$\boxed{(4x-20)\cdot(x-2)\cdot(2x+2)\cdot(2x-6)<0}$$

❹Löse die Algebraische Ungleichung:

Bei drei der Klammern kann man einen Faktor ausklammern:

$$\boxed{4\,(x-5)\cdot(x-2)\cdot 2(x+1)\cdot 2(x-3)<0}$$

Die ausgeklammerten Faktoren fassen wir zusammen:

$$\boxed{16\cdot\;(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)<0}$$

Den Faktor 16 beseitigen wir nun, indem wir die Ungleichung durch 16 dividieren:

$$\boxed{(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)<0}$$

Die linke Seite der Ungleichung wechselt immer dann ihr Vorzeichen, wenn einer der Faktoren (Klammern) gleich Null wird. Dies ist bei x=5, x=2, x= –1 und x=3 der Fall.

Wir legen eine Tabelle an, um die Algebraische Ungleichung zu lösen:

Intervall:	**(–∞,–1)**	**(–1,2)**	**(2,3)**	**(3,5)**	**(5, ∞)**
Vorzeichen von $(x+1)$:	–	+	+	+	+
Vorzeichen von $(x-2)$:	–	–	+	+	+
Vorzeichen von $(x-3)$:	–	–	–	+	+
Vorzeichen von $(x-5)$:	–	–	–	–	+
Vorzeichen von $(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)$:	+	–	+	–	+

Wir können das Ergebnis nun ablesen: In den Intervallen (–1,2) und (3,5) ist die linke Seite der Ungleichung negativ, und somit ist die Ungleichung dort wahr. Die Lösungsmenge lautet also:

$$\underline{\underline{L = (-1,2)\cup(3,5)}}$$

Da beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, ist dies auch die Lösung.