

1 Die Determinantenfunktion

Wir wollen an dieser Stelle einen etwas anderen Zugang zu der der Determinante einer Matrix finden. Bekannt sind Funktionen wie $f(x) = x^2$ die einer reellen Variable einen reellen Wert zuordnen. Nun wollen wir eine Funktion finden die einer Matrix Y eine reelle Zahl $f(Y)$ zuordnet, dieses f nennen wir dann die **Determinatenfunktion**. Die **Determinantenfunktion** hat wichtige Anwendungen bei linearen Gleichungssystemen und führt ausserdem zu einer expliziten Formel zur Berechnung der Inversen einer Matrix.

Wir wissen bereits, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

für $ad - bc \neq 0$ invertierbar ist. Der Ausdruck $ad - bc$ taucht häufig auf, er heisst *Determinante* der 2×2 -Matrix A und wird mit $\det(A)$ bezeichnet. Damit erhalten wir als Inverse von A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun diesen Begriff auf Matrizen höherer Ordnung übertragen. Zur Vorbereitungen benötigen wir allerdings zunächst den Begriff der Permutationen.

1.1 Permutationen

Definition 1.1 Eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist eine Anordnung dieser Zahlen ohne Auslassungen oder Wiederholungen.

Beispiel 1.2 Es gibt sechs verschiedene Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$: $(1, 2, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(2, 1, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$; $(3, 2, 1)$.

Man bemerkt nun ganz schnell, dass eine gewisse Systematik dahinter steckt und entwickelt somit auch schnell eine allgemeine Formel für die Anzahl der Permutationen. Betrachten wir zunächst noch einmal das obige Beispiel. Wir können zunächst einmal die erste Zahl setzen hierfür haben wir noch drei Möglichkeiten, da sich aber keine Zahlen wiederholen dürfen, haben wir jetzt nur noch für die zweite Stelle zwei Möglichkeiten, und für die letzte nur noch eine! Also ergibt sich für die Anzahl der Permutation $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Satz 1.3 Die Anzahl der Permutationen einer n -elementigen Menge ist $n!$

Definition 1.4 Eine Inversion ist ein Zahlenpaar, deren natürliche Reihenfolge durch die Permutation vertauscht wurde.

Beispiel 1.5 Man bestimme die Anzahl der Inversionen in den folgenden Permutationen:

a) $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$ b) $(2, 4, 1, 3)$ c) $(1, 2, 3, 4)$

(a) Wir betrachten zunächst die 6. 6 und 1 sind in ihrer natürlichen Reihenfolge vertauscht, ebenso 6 und 3, 6 und 4 ... Also haben wir hier 5 Inversionen. Weiter mit der 1, bei der wir keine Inversionen vorfinden...

Also haben wir: $5+0+1+1+1 = 8$ Inversionen.

(b) Die Permutation enthält $1+2+0 = 3$ Inversionen.

(c) Es treten keine Inversionen auf.

Definition 1.6 Eine Permutation heisst **gerade**, wenn die Anzahl ihrer Inversionen gerad ist; sie heisst **ungerade**, wenn sie eine ungerade Anzahl von Inversionen enthält.

Beispiel 1.7 Wir wollen nun am Beispiel der Permutationen von $\{1,2,3\}$ Die Klassifizierung demonstrieren.

Permutation	Anzahl der Inversionen	Klassifizierung
$(1,2,3)$	0	gerade
$(1,3,2)$	1	ungerade
$(2,1,3)$	1	ungerade
$(2,3,1)$	2	gerade
$(3,1,2)$	2	gerade
$(3,2,1)$	3	ungerade

Definition 1.8 Sei θ eine Permutation, dann ist $\text{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \theta \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{wenn } \theta \text{ ungerade ist} \end{cases}$

1.2 Definition der Determinante

Ein **elementares Produkt** aus einer $n \times n$ -Matrix entsteht durch Multiplikation von Elementen von A, wobei keine zwei Faktoren in derselben Zeile oder Spalte stehen.

Beispiel 1.9 Man bestimme alle elementaren Produkte der Matrizen:

$$a) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Lösung: a) Da jedes elementare Produkt aus zwei Faktoren besteht, die in verschiedenen Zeilen stehen, hat es die Form

$$a_{1*}a_{2*}$$

wobei zuerst die Spaltenindizes weggelassen wurden. Da nun die beiden Faktoren nicht in dergleichen Spalte stehen dürfen, muss es sich bei den Zeilenindizes um Permutationen der Menge $\{1,2\}$ handeln, also ergibt sich:

$$a_{11}a_{22}, a_{12}a_{21}$$

b) Da jedes elementare Produkt aus drei Faktoren besteht, die in verschiedenen Zeilen stehen, hat es die Form

$$a_{1*}a_{2*}a_{3*}$$

wobei zuerst die Spaltenindizes weggelassen wurden. Da nun die beiden Faktoren nicht in dergleichen Spalte stehen dürfen, muss es sich bei den Zeilenindizes um Permutationen der Menge $\{1,2,3\}$ handeln, also ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33}, & \quad a_{12}a_{21}a_{33}, & \quad a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32}, & \quad a_{12}a_{23}a_{31}, & \quad a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Wie dieses Beispiel zeigt hat eine $n \times n$ -Matrix $n!$ elementare Produkte der Form $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$, wobei $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist.

Definition 1.10 Ein **vorzeichenbehaftetes elementares Produkt** ist das elementare Produkt multipliziert mit dem Signum der zugehörigen Permutation.

Beispiel 1.11 Man bestimme alle vorzeichenbehafteten elementaren Produkte der Matrizen:

$$a) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Elementares Produkt	Permutation	Klassifizierung	vorzeichenbehafteten elementaren Produkt
$a_{11}a_{22}$	(1,2)	gerade	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2,1)	ungerade	$-a_{12}a_{21}$
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	gerade	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	ungerade	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	ungerade	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	gerade	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	gerade	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	ungerade	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definition 1.12 Sei A eine quadratische Matrix. Wir bezeichnen die **Determinatenfunktion** mit \det , wobei wir $\det(A)$ als Summe aller vorzeichenbehafteter elementarer Produkte aus A definieren. Die so berechnete Zahl nennen wir **Determinante von A**

Beispiel 1.13 Mit Hilfe von Beispiel 1.12 erhält man:

$$a) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$b) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Definition 1.14 (Leibnizsche Determinatenformel) Sei A eine quadratische Matrix: $\det(A) = |A| = \sum \text{sign}(\theta) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, wobei $\theta = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist.

Bem.: An dieser Stelle wird deutlich, dass

1. die Determinante der zu lösenden 5 x 5-Matrix falsch war, denn sie enthielt nicht alle elementare Produkte und die die enthalten waren, waren unvollständig.
2. Die Regel von Sarrus (zur Berechnung der Determinante von 3 x 3-Matrizen vgl. Lambacher Schweizer Analytische Geometrie S. 161) ist offensichtlich im allgemeinen nicht für grössere Matrizen gültig.

2 Determinatenberechnung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Berechnung der Determinaten beschäftigen. Würde man die Determinate nach der Leibniz-Formel berechnen, so würde man schon bei einer 4 x 4-Matrix auf $4! = 24$ elementare Produkte berechnen müssen. Zwar eignet sich die Methode gut für die Berechnung per Computer, aber ansonsten nicht.

Definition 2.1 Sei θ eine Permutation der Menge $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, dann ist $\theta(1)$ das

Satz 2.2 Sei A eine $n \times n$ -Matrix so gilt für die transponierte Matrix A^T : $\det(A^T) = \det(A)$

Beweis: Sei θ eine Permutation der Menge $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, dann gilt nach der Leibniz-Formel:

$$\det(A^T) = \left(\sum \text{sign}(\theta) a_{1\theta(1)} a_{2\theta(2)} \dots a_{n\theta(n)} \right)^T$$

Da bei der transponierten Matrix die Spalten und Zeilen vertauscht werden, vertauschen sich einfach Zeilen- und Spaltenindizes.

$$= \sum \text{sign}(\theta) a_{\theta(1)1} a_{\theta(2)2} \dots a_{\theta(n)n}$$

Es ist klar das die Umkehrung von θ θ^{-1} die gleiche Anzahl an Inversionen besitzt wie θ .

Also ist $\text{sign}(\theta) = \text{sign}(\theta^{-1})$. Auch gilt $a_{\theta(j)j} = a_{j\theta(j)^{-1}}$ für alle $j \leq n$.

$$= \sum \text{sign}(\theta^{-1}) a_{1\theta(1)^{-1}} a_{2\theta(2)^{-1}} \dots a_{n\theta(n)^{-1}}$$

= $\det(A)$ Denn θ^{-1} ist wieder eine Permutation von S_n , also folgt die Leibniz-Formel!

Definition 2.3 1. *A* heisst obere Dreiecksmatrix, wenn alle Einträge unter der Hauptdiagonalen nur Nullen sind.

2. *A* heisst untere Dreiecksmatrix, wenn alle Einträge über der Hauptdiagonalen nur Nullen sind.

3. *A* heisst Dreiecksmatrix, wenn entweder obere oder untere Dreiecksmatrix ist.

Beispiel 2.4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist obere Dreiecksmatrix.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ ist untere Dreiecksmatrix.

Satz 2.5 Sei *A* eine $n \times n$ -Matrix und sei *B* eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die durch Streichen der ersten Zeilen und ersten Spalte aus *A* entstehe. Es sei $a_{1j} = 0$ für alle $j > 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(A) = a_{11} \det(B)$

Beweis: Betrachtet man die Leibniz-Formel, so ist klar, dass alle elementare Produkte wegfallen, die nicht a_{11} enthalten, denn diese werden mit einer 0 aus der ersten Zeile multipliziert. Bleiben also noch die elementaren Produkte, die a_{11} enthalten, was also alle elementaren Produkte der Matrix *B* sind.

Bem.: Es ist offensichtlich klar, dass man dies auch mit allen anderen Elementen der Matrix machen kann, löst man die Matrix geeignet auf, so dass in einer Zeile nur noch Nullen stehen, so kann man nach dieser Zeile 'entwickeln', d.h. man kann den obigen Satz anwenden. Hierzu sind allerdings einige Rechenregeln für Zeilenumformungen nötig! Es wird im folgenden nur angedeutet, was gilt, auf einen Beweis will ich verzichten, weil dies zu weit führen würde und auch teilweise Begriffe und Kenntnisse benötigen würde, die noch nicht bekannt sind.

Satz 2.6 Seien *A, B* $n \times n$ -Matrizen, die identisch sind (bis auf...), dann gilt:

1. *B* entstehe aus *A* durch Vertauschen zweier Zeilen/Spalten dann gilt:

$$\det(B) = -\det(A)$$

2. *B* entstehe aus *A* durch Multiplikation einer Zeile/Spalte mit $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\det(B) = c \det(A)$$

3. Die *i*-te Zeile/Spalte von *B* entstehe aus der Addition des Vielfachens der *j*-ten Zeile/Spalte von *A* zur *i*-ten Zeile von *A*, so gilt: $\det(B) = \det(A)$

4. Enthält A eine Nullzeile/Nullspalte, so gilt:

$$\det(A) = 0$$

5. Ist A eine Dreiecksmatrix, so gilt:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \text{ (Produkt der Hauptdiagonalen)}$$

Nun kann man die Determinante einer beliebigen quadratischen Matrix dadurch bestimmen, dass man zunächst die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf eine Form bringt, in der in einer Zeile nur ein Eintrag und sonst Nullen stehen, dann ist es möglich die in Satz 2.5 beschriebene Form durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält. Nach Satz 2.6 multipliziert sich die Determinante bei Vertauschen von 2 Zeilen oder Spalten mit -1. Man kann aber auch ohne das Vorzeichen, des Eintrages einfach durch folgendes Schaubildes erhalten:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist obere Dreiecksmatrix. $\det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ ist untere Dreiecksmatrix. $\det(B) = 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ enthält eine Nullzeile. $\det(C) = 0$

$$\begin{aligned} \det(D) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -15 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = (-15) (1 \cdot 1 \cdot (-11)) \end{aligned}$$

Ausklammern von 3, Addition von $-2 \cdot 2$.Zeile zu 3.Zeile, Vertauschen von 1.Zeile und 2. Zeile, Ausklammern von 5 Addition von $-2 \cdot 2$.Zeile zu 3.Zeile Produkt der Hauptdiagonalen

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 15 - 3 \cdot 3) = 6$$

Bem.: Falls Interesse besteht, kann ich auch die Formel zur Berechnung der Inversen einer Matrix in einem weiteren teil erläutern, da dies sich nicht so einfach wie bei 2×2 - Matrizen verhält!!!