Gesucht ist die Ableitung eines Produktes:

$$\boxed{\left[g(x)\cdot h(x)\right]' =}$$

Wir schreiben die Ableitung als Differentialquotient:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)-g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Wir zerlegen den Bruch in zwei Brüche:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}\right]$$

Wir wenden den Grenzwertsatz für Differenzen an:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Wir teilen den Bruch im ersten Grenzwert:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot h(x+\Delta x)\right] - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Grenzwertsatz für Produkte anwenden:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot \lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x) - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Wir addieren –g(x)+g(x) im Zähler des ersten Bruches:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)+g(x)}{\Delta x}\cdot \lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x) - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Den ersten Bruch teilen:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \frac{g(x)}{\Delta x}\right]\cdot \lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x) - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

und den Grenzwertsatz für Summen anwenden:

$$= \left[\lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)}{\Delta x}\right]\cdot \lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x) - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Der erste Grenzwert entspricht formal nun dem Differentialquotienten g'(x):

$$= \left[g'(x) + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)}{\Delta x}\right]\cdot \lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x) - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Eckige Klammer ausmultiplizieren:

$$=g'(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

Der ersten Limes berechnen, was h(x) ergibt. Aus dem zweiten und letzten Limes den Faktor g(x) rausziehen:

$$=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x)-g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)}{\Delta x}$$

Ausklammern von g(x):

$$=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} h(x+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)}{\Delta x}\right]$$

Auf ersten und zweiten Limes den Grenzwertsatz für Produkte anwenden:

$$=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)}{\Delta x}\right]$$

Den "Grenzwertsatz für Differenzen" anwenden:

$$=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{h(x+\Delta x)}{\Delta x}-\frac{h(x)}{\Delta x}\right]\right]$$

Brüche zusammen schreiben:

$$=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right]$$

Der Limes wird formal zum Differentialquotienten der Funktion h(x), also zu h'(x). Wir erhalten die Produktregel:

$$\boxed{=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)}$$

