Übungen zum Thema:

Extrem– und Sattelpunkte ganzrationaler Funktionen

Lösungsmethode:

Tabellenverfahren

Version:

Ungeprüfte Testversion vom 6.9.2007 / 20.00 h

1. Finde lokale Extrema und Sattelpunkte der ganzrationalen Funktionen.
Berechne diese Punkte mit Hilfe des Tabellenverfahrens:

1a)	$f(x)=x^4+32x+49$	**1 Extremum**
1b)	$f(x)=x^4-32x+33$	**1 Extremum**
1c)	$f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$	**2 Extrema**
1d)	$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$	**2 Extrema**
1e)	$f(x)=x^3+3x^2-9x+13$	**2 Extrema**
1f)	$f(x)=2x^3-9x^2+12x$	**2 Extrema**
1g)	$f(x)=x^3+3x^2+3x$	**1 Sattelpunkt**
1h)	$f(x)=x^3-9x^2+27x$	**1 Sattelpunkt**
1i)	$f(x)=x^2(5-x)^3$	**2 Extrema + 1 Sattelpunkt**
1j)	$f(x)=\left(x^4+4x^3\right)^3$	**1 Extremum + 2 Sattelpunkte**
1k)	$f(x)=\left(2x-x^2\right)^3$	**1 Extremum + 2 Sattelpunkte**
1L)	$f(x)=\left(3x^2+x^3\right)^3$	**1 Extremum + 2 Sattelpunkte**

Lösung zu 1a

Gegeben:

$f(x) = x^4 + 32x + 49$

Gesucht:

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = x^4 + 32x + 49$

Wir wenden die Summenregel an:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}32x + \frac{d}{dx}49$$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$f'(x) = 4x^3 + 32$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$4x^3 + 32 = 0$

Wir lösen diese kubische Gleichung:

$4x^3 + 32 = 0$

Auf beiden Seiten 32 subtrahieren:

$4x^3 = -32$

Beide Seiten durch 4 teilen:

$x^3 = -8$

Quadrieren der Gleichung:

$(x^3)^2 = (-8)^2$

$x^6 = 64$

Löse die Potenzgleichung durch Wurzelziehen:

$x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

Die Probe ergibt, dass nur $x = -2$ eine Lösung ist.

Die Stelle $x = -2$ ist ein mögliches Extremum / Sattelpunkt.
Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstelle der 1.Ableitung lautete: $x=-2$. *Wir tragen diese Nullstelle der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach dieser Stelle:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion
$-\infty$ bis -2			
-2	– – –	*Null*	*horizontal*
-2 bis ∞			

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-2$ *um ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervall vor bzw. im Intervall nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die beiden Stellen $x=-10$ *und* $x=0$:

Erste Ableitung: $\boxed{\boxed{f'(x)=4x^3+32}}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-10$: $\boxed{f'(\mathbf{-10})=4\cdot(\mathbf{-10})^3+32=-3968<0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$: $\boxed{f'(\mathbf{0})=4\cdot\mathbf{0}^3+32=32>0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion
$-\infty$ bis -2	-10	*negativ*	*fällt*
-2	– – –	*Null*	*horizontal*
-2 bis ∞	0	*positiv*	*steigt*

Nun können wir ablesen, ob $x=-2$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*
Weil die Funktion vor der Stelle $x=-2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-2 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :
$x = -2$ *ein Minimum*

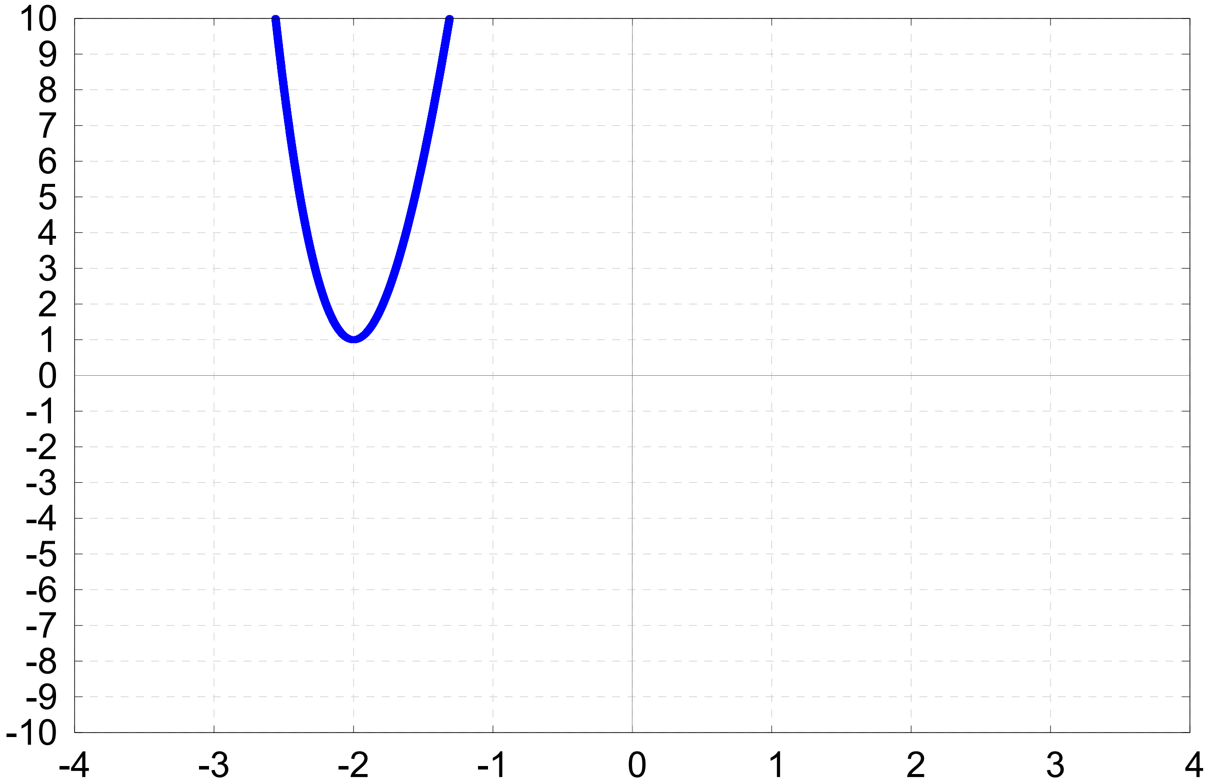
Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^4 + 32x + 49$

$f(-2) = f(x) = (-2)^4 + 32 \cdot (-2) + 49 = \boxed{1}$

Ergebnis:

Das Minimum der Funktion hat folgende Koordinaten :
$(-2 \,/\, 1)$ *ist ein Minimum*

Graph:



Lösung zu 1b

Gegeben :

$f(x) = x^4 - 32x + 33$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^4 - 32x + 33$

Wir wenden die Summenregel an :

$f'(x) = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}32x + \frac{d}{dx}33$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 4x^3 - 32$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$4x^3 - 32 = 0$

Wir lösen diese kubische Gleichung :

$4x^3 - 32 = 0$

Auf beiden Seiten 32 subtrahieren :

$4x^3 = 32$

Beide Seiten durch 4 teilen :

$x^3 = 8$

Löse die Potenzgleichung durch Wurzelziehen :

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

Die Stelle $x = 2$ ist ein mögliches Extremum / Sattelpunkt.
Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstelle der 1.Ableitung lautete: $x = 2$. *Wir tragen diese Nullstelle in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach dieser Stelle*

x	Gewählt:	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 2				
2	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
2 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 2$ *um ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervall vor bzw. im Intervall nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die beiden Stellen $x = 1$ *und* $x = 3$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 32}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 1$: $\boxed{f'(\mathbf{1}) = 4 \cdot \mathbf{1}^3 - 32 = -28 < 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 3$: $\boxed{f'(\mathbf{3}) = 4 \cdot \mathbf{3}^3 - 32 = 76 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 2	1	negativ	fällt	
2	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Minimum*
2 bis ∞	3	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, ob $x = 2$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*
Weil die Funktion vor der Stelle $x = 2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 2 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :

$x = 2$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^4 - 32x + 33$

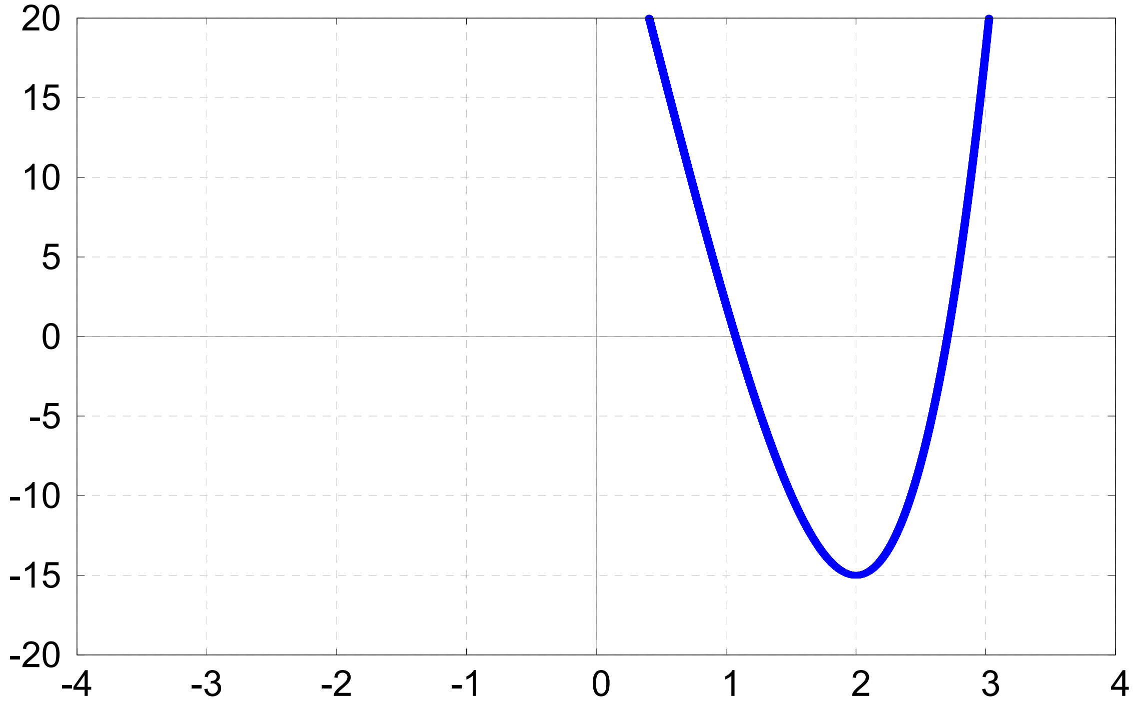
$f(\mathbf{2}) = f(x) = \mathbf{2}^4 - 32 \cdot \mathbf{2} + 33 = \boxed{-15}$

Ergebnis:

Das Minimum der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(2 / -15)$ *ist ein Minimum*

Graph:



Lösung zu 1c

Gegeben :

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Wir wenden die Summenregel an :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}2x^3 - \frac{d}{dx}3x^2 - \frac{d}{dx}12x + \frac{d}{dx}5$$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$6x^2 - 6x - 12 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6} = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{12} = \frac{6 \pm 18}{12}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Die Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ sin d mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = 2$ *und* $x = -1$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen beiden Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1				
-1	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-1 bis 2				
2	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
2 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 2$ *und* $x = -1$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die Stellen $x = -2$, $x = 0$ *und* $x = 3$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = -2$: $\boxed{f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 12 = 24 > 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$: $\boxed{f'(0) = 6 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 12 = -12 < 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 3$: $\boxed{f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 12 = 24 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1	-2	positiv	steigt	
-1	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Maximum*
-1 bis 2	0	negativ	fällt	
2	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Minimum*
2 bis ∞	3	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, ob $x = 2$ *und* $x = -1$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*
1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = -1$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x = -1 \text{ ein Maximum}}$.
2. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = 2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 2 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -1$ *ein Maximum*
$x = 2$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

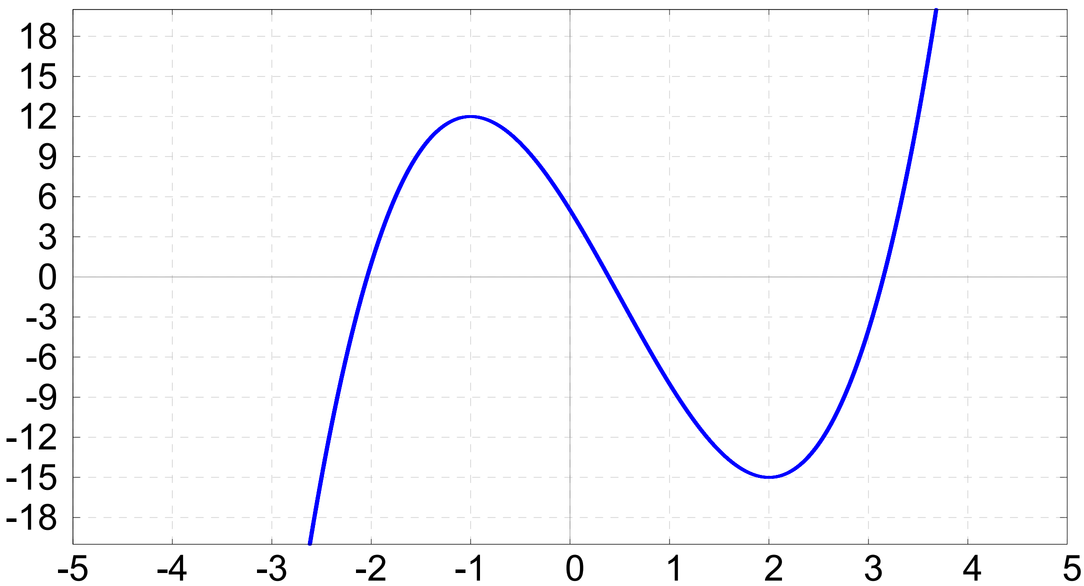
$f(\mathbf{-1}) = 2\cdot(\mathbf{-1})^3 - 3\cdot(\mathbf{-1})^2 - 12\cdot(\mathbf{-1}) + 5 = \boxed{12}$
$f(\mathbf{2}) = 2\cdot\mathbf{2}^3 - 3\cdot\mathbf{2}^2 - 12\cdot\mathbf{2} + 5 = \boxed{-15}$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(-1/12)$
Minimum bei $(2/-15)$

Graph:



Lösung zu 1d

Gegeben :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Wir wenden die Summenregel an :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}6x^2 + \frac{d}{dx}9x + \frac{d}{dx}1$$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Die Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sind mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = 1$ *und* $x = 3$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen beiden Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1				
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis 3				
3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
3 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 1$ *und* $x = 3$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die drei Stellen $x = 0$, $x = 2$ *und* $x = 4$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$: $\boxed{f'(\mathbf{0}) = 3 \cdot \mathbf{0}^2 - 12 \cdot \mathbf{0} + 9 = 9 > 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 2$: $\boxed{f'(\mathbf{2}) = 3 \cdot \mathbf{2}^2 - 12 \cdot \mathbf{2} + 9 = -3 < 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 4$: $\boxed{f'(\mathbf{4}) = 3 \cdot \mathbf{4}^2 - 12 \cdot \mathbf{4} + 9 = 9 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	0	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Maximum*
1 bis 3	2	negativ	fällt	
3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Minimum*
3 bis ∞	4	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, ob $x = 1$ *bzw.* $x = 3$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*

1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = 1$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x = 1 \text{ ein Maximum}}$.
2. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = 3$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 3 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = 1$ *ein Maximum*
$x = 3$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^3 - 6 \cdot \mathbf{1}^2 + 9 \cdot \mathbf{1} + 1 = \boxed{5}$

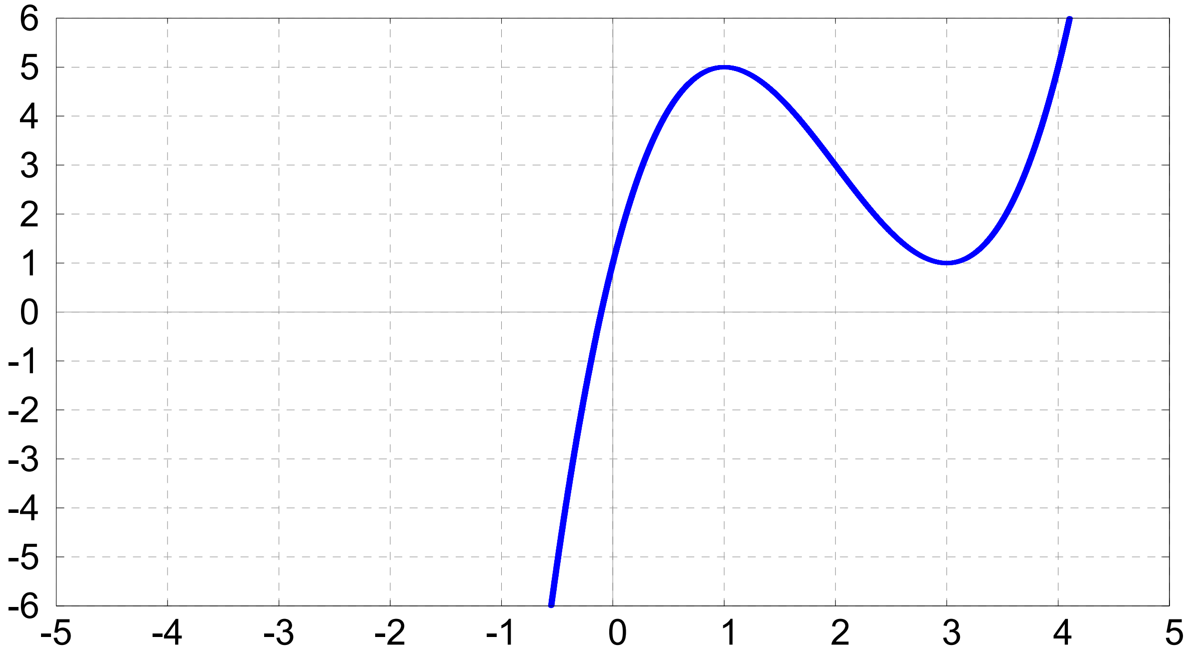
$f(\mathbf{3}) = \mathbf{3}^3 - 6 \cdot \mathbf{3}^2 + 9 \cdot \mathbf{3} + 1 = \boxed{1}$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(1/5)$
Minimum bei $(3/1)$

Graph:



Lösung zu 1e

Gegeben :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 13$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 13$

Wir wenden die Summenregel an :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}3x^2 - \frac{d}{dx}9x + \frac{d}{dx}13$$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{-6 \pm 12}{6}$$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

Die Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ sind mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = -3$ *und* $x = 1$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen beiden Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3				
-3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-3 bis 1				
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
1 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = -3$ *und* $x = 1$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die drei Stellen $x = -4$, $x = 0$ *und* $x = 2$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 6x - 9}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = -4$: $\boxed{f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 9 = 15 > 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$: $\boxed{f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 2$: $\boxed{f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 15 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	-4	positiv	steigt	
-3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
-3 bis 1	0	negativ	fällt	
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Minimum
1 bis ∞	2	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, ob $x = -3$ *bzw.* $x = 1$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*
1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = -3$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x = -3 \text{ ein Maximum}}$.
2. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x = 1$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 1 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -3$ *ein Maximum*
$x = 1$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 13$

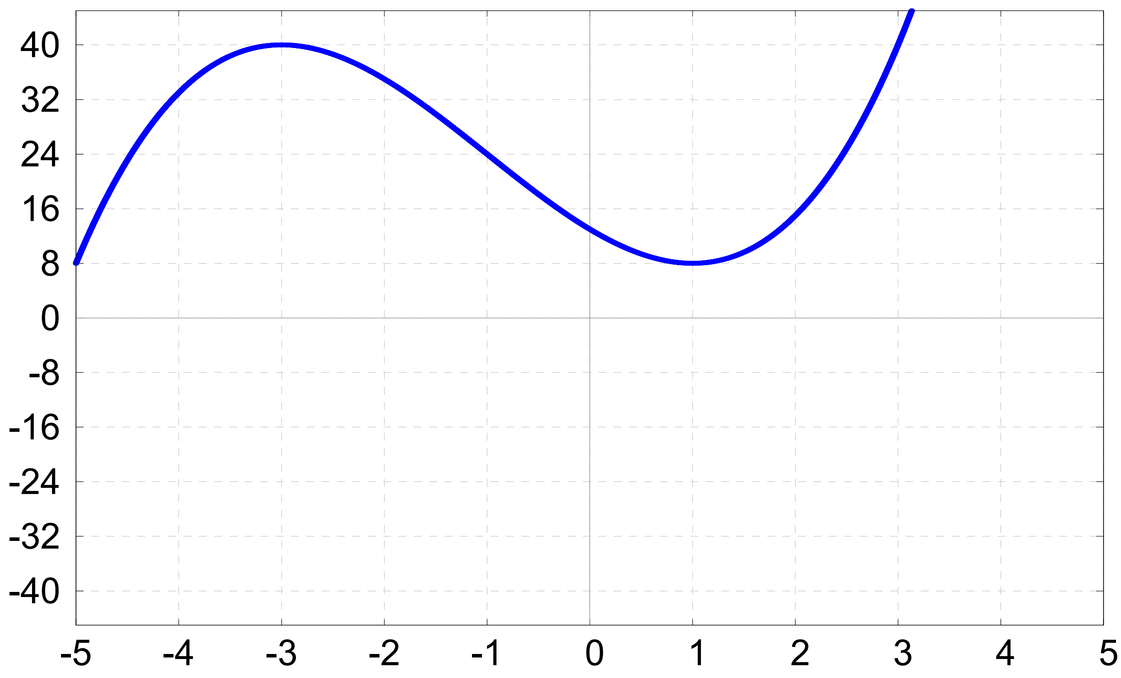
$$f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 13 = \boxed{40}$$
$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 13 = \boxed{8}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(-3/40)$
Minimum bei $(1/8)$

Graph:



Lösung zu 1f

Gegeben :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Wir wenden die Summenregel an :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}2x^3 - \frac{d}{dx}9x^2 + \frac{d}{dx}12x$$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$$6x^2 - 18x + 12 = 0$$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{12} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Die Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ sin d mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = 1$ *und* $x = 2$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen beiden Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1				
1	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis 2				
2	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
2 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 1$ *und* $x = 2$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die drei Stellen $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ *und* $x = 3$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 18x + 12}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$: $\boxed{f'(\mathbf{0}) = 6 \cdot \mathbf{0}^2 - 18 \cdot \mathbf{0} + 12 > 12}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = \frac{3}{2}$: $\boxed{f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 12 = -\frac{3}{2} < 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 3$: $\boxed{f'(\mathbf{3}) = 6 \cdot (\mathbf{3})^2 - 18 \cdot (\mathbf{3}) + 12 = 12 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	*0*	*positiv*	*steigt*	
1	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *Maximum*
1 bis 2	$\frac{3}{2}$	*negativ*	*fällt*	
2	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *Minimum*
2 bis ∞	3	*positiv*	*steigt*	

Nun können wir ablesen, ob $x = 1$ *bzw.* $x = 2$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist:*

1. Weil die Funktion vor der Stelle $x = 1$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x = 1 \text{ ein Maximum}}$.

2. Weil die Funktion vor der Stelle $x = 2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 2 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = 1$ *ein Maximum*
$x = 2$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

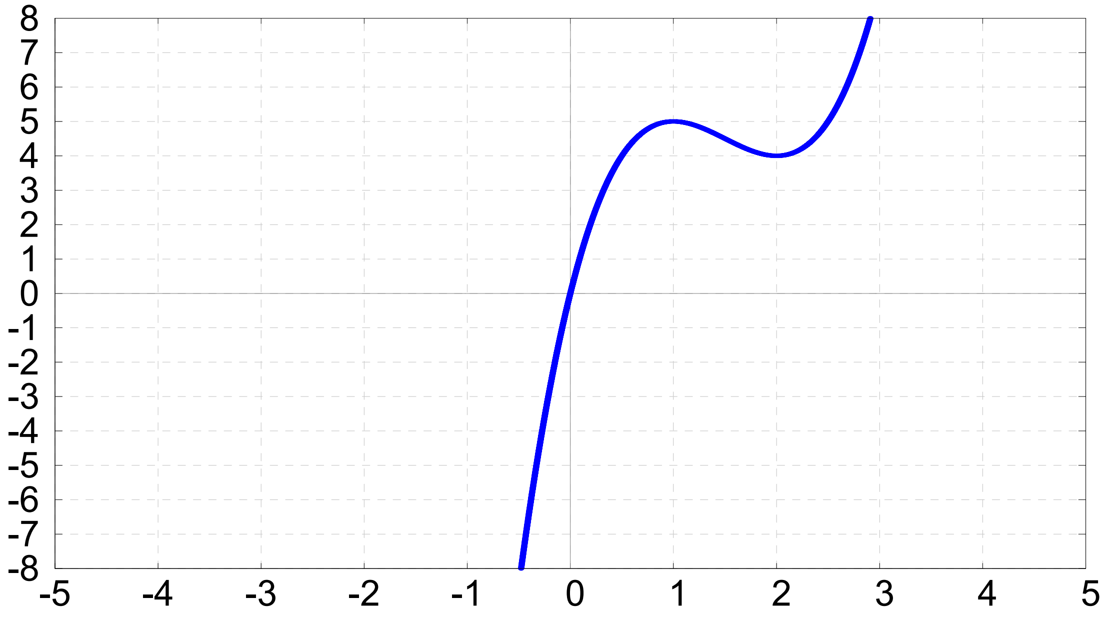
$$f(\mathbf{1}) = 2 \cdot \mathbf{1}^3 - 9 \cdot \mathbf{1}^2 + 12 \cdot \mathbf{1} = \boxed{5}$$
$$f(\mathbf{2}) = 2 \cdot \mathbf{2}^3 - 9 \cdot \mathbf{2}^2 + 12 \cdot \mathbf{2} = \boxed{4}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(1/5)$
Minimum bei $(2/4)$

Graph:



Lösung zu 1g

Gegeben:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

Gesucht:

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

Wir wenden die Summenregel an:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}3x$$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3x^2 + 6x + 3 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{6} = -1$$

Die Stelle $x = -1$ ist ein mögliches Extremum bzw. ein Sattelpunkt. Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Hinweis auf alternativen Lösungsweg:

Alternativ könnte man die Gleichung $3x^2 + 6x + 3 = 0$ auch durch 3 teilen, und würde ein Binom erhalten: $x^2 + 2x + 1 = 0$ bzw. $(x+1)^2 = 0$

Die Lösung $x = -1$ könnte man dann aus der letzten Gleichung sofort ablesen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die einzige Nullstelle der 1.Ableitung lautet : $x=-1$ *. Wir tragen diese Nullstelle in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich das Intervall vor bzw. nach dieser Stelle :*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1				
-1	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-1 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-1$ *um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion im Intervall vor bzw. nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die Stellen $x=-2$ *und* $x=0$ *:*

Erste Ableitung : $\boxed{f'(x)=3x^2+6x+3}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-2$ *:* $\boxed{f'(-2)=3\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)+3=3>0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$ *:* $\boxed{f'(0)=3\cdot 0^2+6\cdot 0+3=3>0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt :

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1	-2	*positiv*	*steigt*	
-1	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
-1 bis ∞	0	*positiv*	*steigt*	

Nun können wir ablesen, ob $x=-1$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist : Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle* $x=-1$ *steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-1 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinate des Sattelpunktes berechnet :

$x = -1$

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

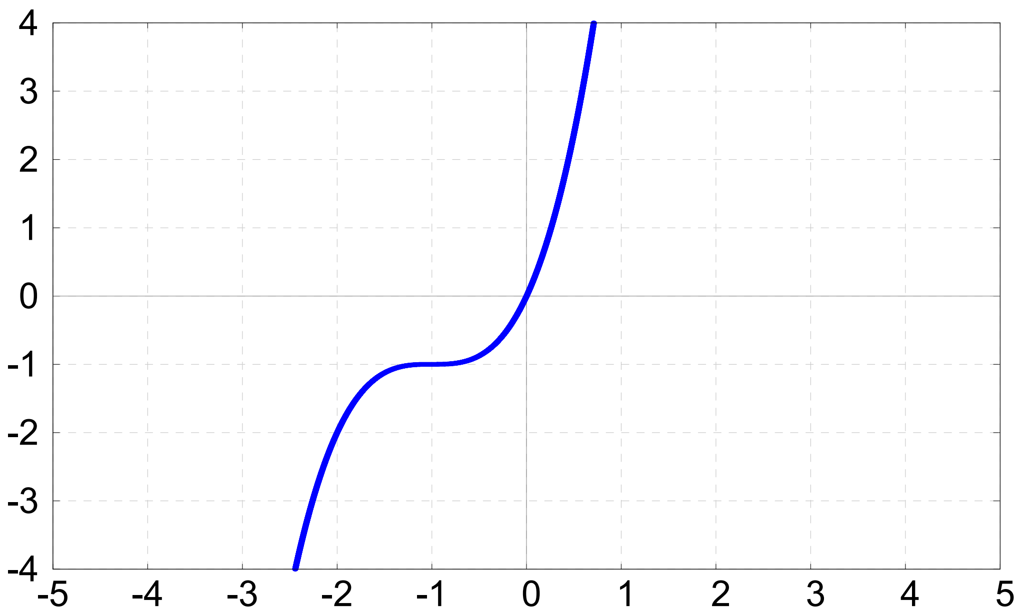
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = \boxed{-1}$

Ergebnis:

Die Funktion hat keine Extrema aber einen Sattelpunkt :

Sattelpunkt bei $(-1/-1)$

Graph:



Lösung zu 1h

Gegeben :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

Wir wenden die Summenregel an :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}9x^2 + \frac{d}{dx}27x$$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$3x^2 - 18x + 27 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{6} = 3$$

Die Stelle $x = 3$ ist ein mögliches Extremum bzw. ein Sattelpunkt. Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die einzige Nullstelle der 1.Ableitung lautet : $x = 3$ *. Wir tragen diese Nullstelle in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich das Intervall vor bzw. nach dieser Stelle :*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion
$-\infty$ bis 3			
3	– – –	*Null*	*horizontal*
3 bis ∞			

⇐ zu untersuchende Stelle

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 3$ *um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion im Intervall vor bzw. nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die beiden Stellen $x = 0$ *und* $x = 4$ *:*

Erste Ableitung : $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 18x + 27}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ *:* $\boxed{f'(\mathbf{0}) = 3 \cdot \mathbf{0}^2 - 18 \cdot \mathbf{0} + 27 = 27 > 0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 4$ *:* $\boxed{f'(\mathbf{4}) = 3 \cdot \mathbf{4}^2 - 18 \cdot \mathbf{4} + 27 = 3 > 0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt :

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion
$-\infty$ bis 3	*0*	*positiv*	*steigt*
3	– – –	*Null*	*horizontal*
3 bis ∞	*4*	*positiv*	*steigt*

⇐ Sattelpunkt

Nun können wir ablesen, ob $x = 3$ *ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist : Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle* $x = 3$ *steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 3 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema/Sattel berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinate des Sattelpunktes berechnet :

$x = 3$

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

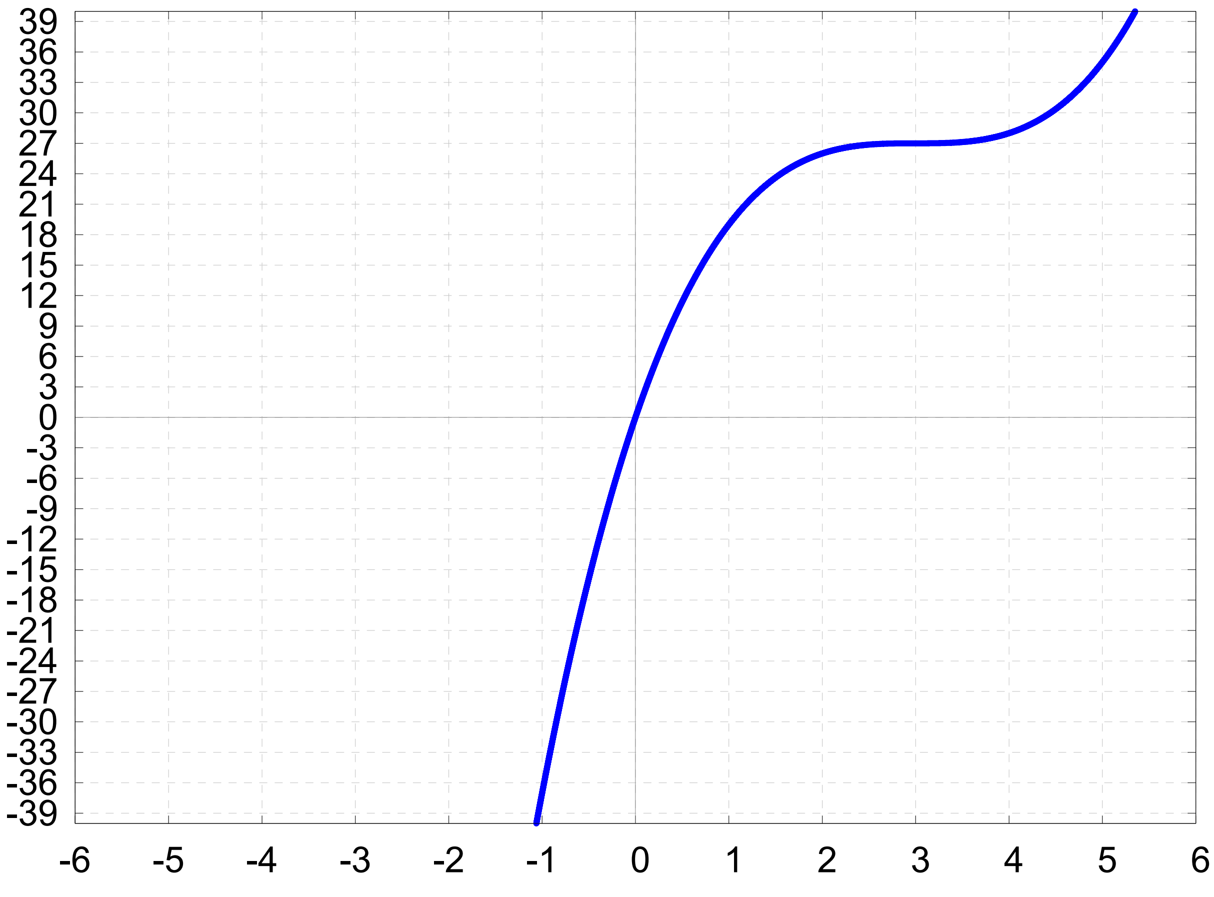
$f(\mathbf{3}) = \mathbf{3}^3 - 9 \cdot \mathbf{3}^2 + 27 \cdot \mathbf{3} = \boxed{27}$

Ergebnis:

Die Funktion hat keine Extrema aber einen Sattelpunkt :

Sattelpunkt bei (3 / 27)

Graph:



Lösung zu 1i

Gegeben :

$f(x) = x^2(5-x)^3$

Gesucht :

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^2(5-x)^3$

Wir benutzen die Produktregel $\mathbf{f'(uv) = u \cdot v' + u' \cdot v}$:

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[(5-x)^3\right] + \frac{d}{dx}\left[x^2\right] \cdot (5-x)^3$$

Nun wenden wir die Kettenregel an, um das linke Differential zu berechnen :

$$f'(x) = x^2 \cdot \left[3(5-x)^2 \cdot (-1)\right] + \frac{d}{dx}\left[x^2\right] \cdot (5-x)^3$$

Vereinfachen :

$$f'(x) = -3x^2(5-x)^2 + \frac{d}{dx}\left[x^2\right] \cdot (5-x)^3$$

Nun wenden wir die Potenzregel an, um das rechte Differential zu berechnen :

$$f'(x) = -3x^2(5-x)^2 + 2x \cdot (5-x)^3$$

Ausklammern von $x(5-x)^2$:

$$f'(x) = x(5-x)^2\left[-3x + 2(5-x)\right]$$

Vereinfachen :

$$f'(x) = x(5-x)^2(10-5x)$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$$x(5-x)^2(10-5x) = 0$$

Die Lösungen kann man ablesen, wenn man sich an den Satz aus der Algebra erinnert :
"Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist."

$x_1 = 0$
$x_2 = 5$
$x_3 = 2$

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=0$, $x=2$ *und* $x=5$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervall vor bzw. nach diesen Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0				
0	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis 2				
2	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ zu untersuchende Stelle
2 bis 5				
5	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ zu untersuchende Stelle
5 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=0$, $x=2$ *und* $x=5$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion im Intervall vor bzw. nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen $x=-1$, $x=1$, $x=4$ *und* $x=6$:

Erste Ableitung: $\boxed{f'(x)=x\cdot(5-x)^2\cdot(10-5x)}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$: $\boxed{f'(-1)=(-1)\cdot(5-(-1))^2\cdot(10-5(-1))=-540<0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=1$: $\boxed{f'(1)=1\cdot(5-1)^2\cdot(10-5\cdot 1)=80>0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=4$: $\boxed{f'(4)=4\cdot(5-4)^2\cdot(10-5\cdot 4)=-40<0}$

Erste Ableitung an der Stelle $x=6$: $\boxed{f'(6)=6\cdot(5-6)^2\cdot(10-5\cdot 6)=-120<0}$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle e int ragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	*–1*	*negativ*	*fällt*	
0	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ Minimum
0 bis 2	*1*	*positiv*	*steigt*	
2	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ Maximum
2 bis 5	*4*	*negativ*	*fällt*	
5	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ Sattelpunkt
5 bis ∞	*6*	*negativ*	*fällt*	

Nun können wir ablesen, ob es sich bei $x=0$, $x=2$ *und* $x=5$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt:*
1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=0$ *fällt und danach steigt, hat sie bei* $\boxed{x=0 \text{ ein Minimum}}$.
2. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=2$ *steigt und danach fällt, hat sie bei* $\boxed{x=2 \text{ ein Maximum}}$
3. *Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle* $x=4$ *fällt, hat sie bei* $\boxed{x=5 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema und *Sattelpunkte berechnet :*

$x = 0$ (Minimum)
$x = 2$ (Maximum)
$x = 5$ (Sattelpunkt)

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^2 (5 - x)^3$

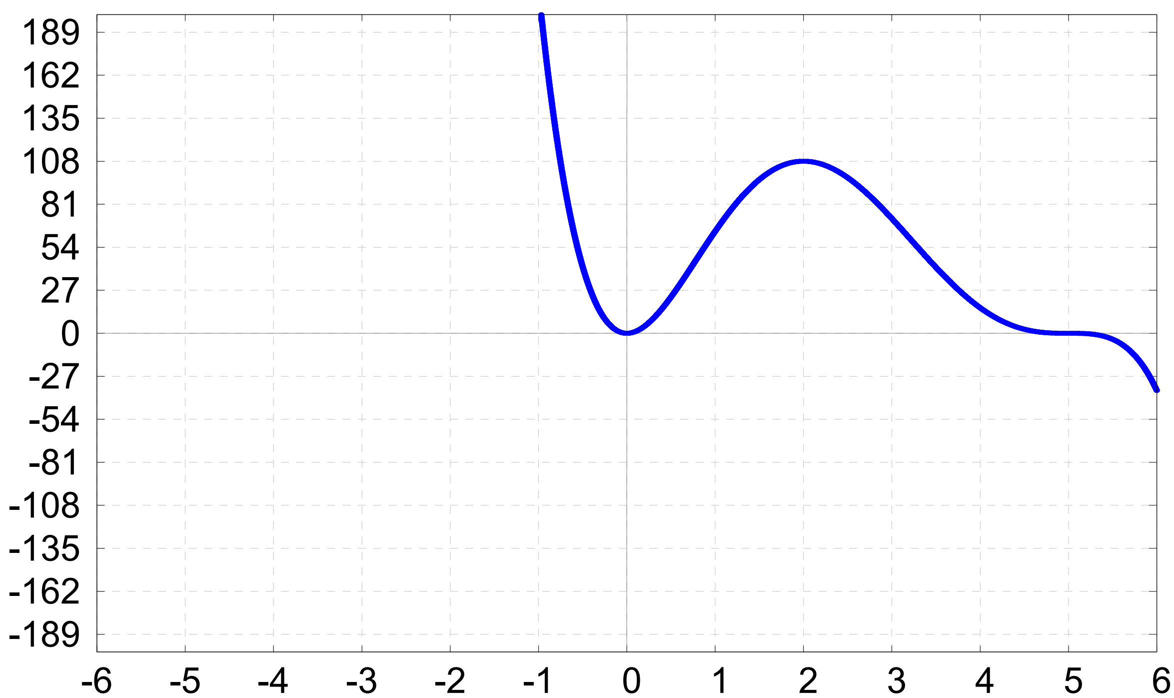
$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^2 (5 - \mathbf{0})^3 = \boxed{0}$
$f(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 (5 - \mathbf{2})^3 = \boxed{108}$
$f(\mathbf{5}) = \mathbf{5}^2 (5 - \mathbf{5})^3 = \boxed{0}$

Ergebnis:

Die Funktion hat fo lg ende Extrema und Sattelpunkte :

Minimum (0 / 0)
Maximum (2 / 108)
Sattelpunkt (5 / 0)

Graph:



Lösung zu 1j

Gegeben:

$f(x) = \left(x^4 + 4x^3\right)^3$

Gesucht:

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = \left(x^4 + 4x^3\right)^3$

Wir benutzen die Kettenregel: $\mathbf{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$:

$f'(x) = 3\left(x^4 + 4x^3\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^4 + 4x^3\right)$

Jetzt lösen wir das übrige Differential mit Hilfe der Summen- und Potenzregel:

$f'(x) = 3\left(x^4 + 4x^3\right)^2 \cdot \left(4x^3 + 12x^2\right)$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3\left(x^4 + 4x^3\right)^2 \cdot \left(4x^3 + 12x^2\right) = 0$

Jetzt benutzten wir mehrmals einen Satz aus der Algebra:
"Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist."
Wir müssen also die beiden Faktoren jeweils mit Null gleichsetzen:

$$3\left(x^4 + 4x^3\right)^2 = 0$$
$$\left(x^4 + 4x^3\right)^2 = \frac{0}{3}$$
$$\left(x^4 + 4x^3\right)^2 = 0$$
$$\sqrt{\left(x^4 + 4x^3\right)^2} = \sqrt{0}$$
$$x^4 + 4x^3 = 0$$
$$x^3\left(x + 4\right) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -4$$

$$4x^3 + 12x^2 = 0$$
$$x^2\left(4x + 12\right) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = -3$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung lauten somit: $x = -4$, $x = -3$ *und* $x = 0$.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten : $x=-4$, $x=-3$ und $x=0$. Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervall vor bzw. nach diesen Stellen :

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -4				
-4	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-4 bis -3				
-3	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-3 bis 0				
0	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞				

Nun berechnen wir in jedem Intervall die Steigung der 1.Ableitung.

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen $x=-5$, $x=-\frac{7}{2}$, $x=-1$ und $x=1$:

Erste Ableitung :

$$\boxed{f'(x)=3\left(x^4+4x^3\right)^2\bullet\left(4x^3+12x^2\right)}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-5$:

$$f'(-5)=3\left((-5)^4+4\cdot(-5)^3\right)^2\bullet\left(4\cdot(-5)^3+12\cdot(-5)^2\right)=-9375000<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-\frac{7}{2}$:

$$f'\left(-\frac{7}{2}\right)=3\left[\left(-\frac{7}{2}\right)^4+4\left(-\frac{7}{2}\right)^3\right]^2\bullet\left[4\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^3+12\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^2\right]=-\frac{69177612}{2048}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$:

$$f'(-1)=3\left((-1)^4+4\cdot(-1)^3\right)^2\bullet\left(4\cdot(-1)^3+12\cdot(-1)^2\right)=648>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=1$:

$$f'(1)=3\left(1^4+4\cdot1^3\right)^2\bullet\left(4\cdot1^3+12\cdot1^2\right)=1200>0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt :

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -4	-5	*negativ*	*fällt*	
-4	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
-4 bis -3	$-\frac{7}{2}$	*negativ*	*fällt*	
-3	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Minimum
-3 bis 0	-1	*positiv*	*steigt*	
0	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
0 bis ∞	1	*positiv*	*steigt*	

Nun können wir ablesen, ob $x=-4$, $x=-3$ bzw. $x=0$ ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist :

Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle $x=-4$ fällt, hat sie bei $\boxed{x=-4 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x=-3$ fällt und danach steigt, hat sie bei $\boxed{x=-3 \text{ ein Minimum}}$.

Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle $x=0$ steigt, hat sie bei $\boxed{x=0 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema und *Sattelpunkte berechnet :*

$x = -4$ (Sattelpunkt)
$x = -3$ (Minimum)
$x = 0$ (Sattelpunkt)

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \left(x^4 + 4x^3\right)^3$

$f(-4)) = \left(x^4 + 4x^3\right)^3 = \boxed{0}$

$f(-3) = \left(x^4 + 4x^3\right)^3 = \boxed{19683}$

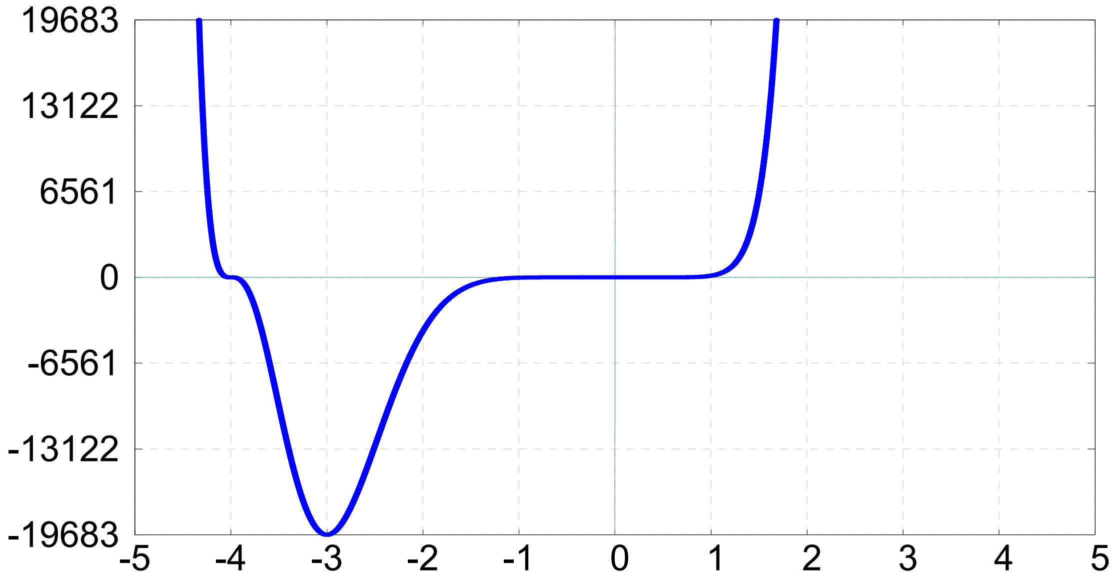
$f(0) = \left(0^4 + 4 \cdot 0^3\right)^3 = \boxed{0}$

Ergebnis:

Die Funktion hat fo lg ende Extrema und Sattelpunkte :

Sattelpunkt $(-4/0)$
Minimum $(-3/19683)$
Sattelpunkt $(0/0)$

Graph:



Lösung zu 1k

Gegeben:

$f(x) = (2x - x^2)^3$

Gesucht:

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = (2x - x^2)^3$

Wir benutzen die Kettenregel: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$:

$f'(x) = 3(2x - x^2)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x - x^2)$

Jetzt lösen wir das übrige Differential mit Hilfe der Summen- und Potenzregel:

$f'(x) = 3(2x - x^2)^2 \cdot (2 - 2x)$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3(2x - x^2)^2 \cdot (2 - 2x) = 0$

Jetzt benutzten wir mehrmals einen Satz aus der Algebra:
"Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist."
Wir müssen also die beiden Faktoren jeweils mit Null gleichsetzen:

$$3(2x - x^2)^2 = 0$$
$$(2x - x^2)^2 = \frac{0}{3}$$
$$(2x - x^2)^2 = 0$$
$$\sqrt{(2x - x^2)^2} = \sqrt{0}$$
$$2x - x^2 = 0$$
$$x(2 - x) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$

$$2 - 2x = 0$$
$$2 = 2x$$
$$x = \frac{2}{2}$$
$$\Rightarrow$$
$$x_3 = 1$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung lauten somit: $x = 0,\ x = 1$ *und* $x = 2.$

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x = 0, x = 1$ und $x = 2$. Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervall vor bzw. nach diesen Stellen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0				
0	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
0 bis 1				
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
1 bis 2				
2	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
2 bis ∞				

Nun berechnen wir in jedem Intervall die Steigung der 1.Ableitung.

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die Stellen $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ und $x = 3$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x) = 3\left(2x - x^2\right)^2 \bullet (2 - 2x)}$$

Erste Ableitung an der Stelle x = –1:

$$f'(-1) = 3\left(2 \cdot (-1) - (-1)^2\right)^2 \bullet \left(2 - 2 \cdot (-1)\right) = 108 > 0$$

Erste Ableitung an der Stelle x = $\frac{1}{2}$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left[2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 \bullet \left[2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{27}{16} > 0$$

Erste Ableitung an der Stelle x = $\frac{3}{2}$:

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left[2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^2 \bullet \left(2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{27}{16} < 0$$

Erste Ableitung an der Stelle x = 3:

$$f'(3) = 3\left(2 \cdot 3 - 3^2\right)^2 \bullet \left(2 - 2 \cdot 3\right) = -108 < 0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	-1	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
0 bis 1	$\frac{1}{2}$	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis 2	$\frac{3}{2}$	negativ	fällt	
2	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
2 bis ∞	3	negativ	fällt	

Nun können wir ablesen, ob x = 0 , x = 1 bzw. x = 2 ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist:

Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle $x = 0$ steigt, hat sie bei $\boxed{x = 0 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x = 1$ steigt und danach fällt, hat sie bei $\boxed{x = 1 \text{ ein Maximum}}$.

Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle $x = 2$ fällt, hat sie bei $\boxed{x = 2 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema und *Sattelpunkte berechnet :*

$x = 0$ (Sattelpunkt)
$x = 1$ (Maximum)
$x = 2$ (Sattelpunkt)

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = (2x - x^2)^3$

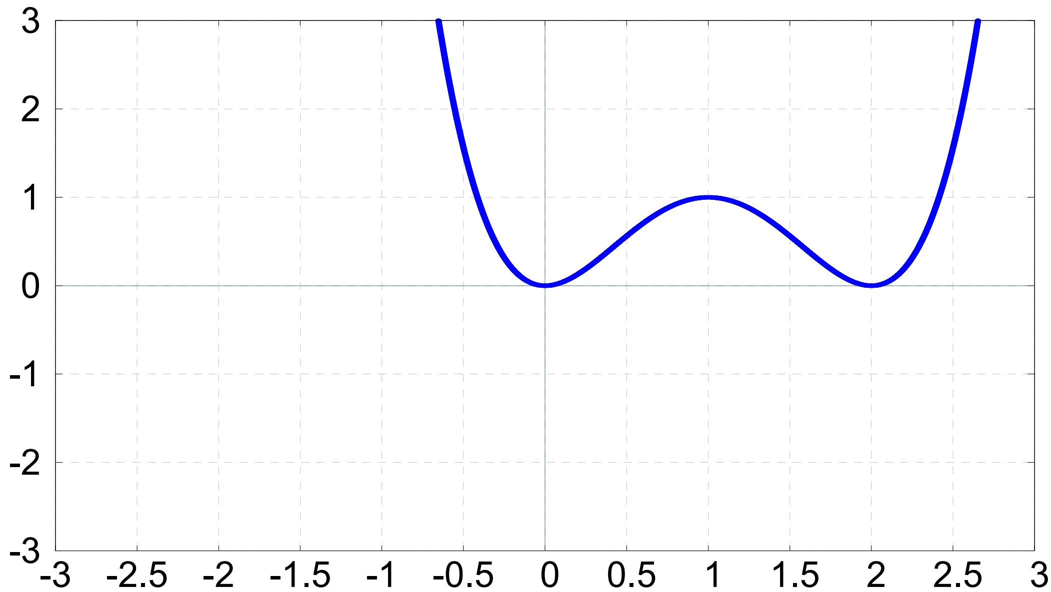
$$f(\mathbf{0}) = (2 \cdot \mathbf{0} - \mathbf{0}^2)^3 \quad = \boxed{0}$$
$$f(\mathbf{1}) = (2 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{1}^2)^3 \quad = \boxed{1}$$
$$f(\mathbf{2}) = (2 \cdot \mathbf{2} - \mathbf{2}^2)^3 \quad = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema und Sattelpunkte :

Sattelpunkt (0/0)
Maximum (1/1)
Sattelpunkt (2/0)

Graph:



Lösung zu 1L

Gegeben:

$f(x)=\left(3x^2+x^3\right)^3$

Gesucht:

Lokale Extrema, Sattelpunkte

1.Ableitung bilden und Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x)=\left(3x^2+x^3\right)^3$

Wir benutzen die Kettenregel: $\boldsymbol{f'(x)=u'(v(x))\bullet v'(x)}\cdot$:

$f'(x)=3\left(3x^2+x^3\right)^2\bullet\frac{d}{dx}\left(3x^2+x^3\right)$

Jetzt lösen wir das übrige Differential mit Hilfe der Summen- und Potenzregel:

$f'(x)=3\left(3x^2+x^3\right)^2\bullet\left(6x+3x^2\right)$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3\left(3x^2+x^3\right)^2\bullet\left(6x+3x^2\right)=0$

Jetzt benutzten wir mehrmals einen Satz aus der Algebra:

"Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist."

Wir müssen also die beiden Faktoren jeweils mit Null gleichsetzen:

$3\left(3x^2+x^3\right)^2=0$

$\left(3x^2+x^3\right)^2=\frac{0}{3}$

$\left(3x^2+x^3\right)^2=0$

$\sqrt{\left(3x^2+x^3\right)^2}=\sqrt{0}$

$\left(3x^2+x^3\right)=0$

$x^2\left(3+x\right)=0$

$\Rightarrow$

$x_1=0$

$x_2=-3$

$6x+3x^2=0$

$x\cdot\left(6+3x\right)=0$

$\Rightarrow$

$x_3=0$

$x_4=-2$

Die Nullstellen der ersten Ableitung lauten somit: $x=-3,\ x=-2$ *und* $x=0.$

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=-3, x=-2$ *und* $x=0$. *Wir tragen diese Nullstellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervall vor bzw. nach diesen Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3				
-3	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-3 bis -2				
-2	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-2 bis 0				
0	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞				

Nun berechnen wir in jedem Intervall die Steigung der 1.Ableitung.

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die Stellen $x=-4,\ x=-\frac{5}{2},\ x=-1$ *und* $x=1$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x)=3\left(3x^2+x^3\right)^2\bullet\left(6x+3x^2\right)}$$

Erste Ableitung an der Stelle x = –4:

$$f'(-4)=3\left[3\cdot(-4)^2+(-4)^3\right]^2\bullet\left[6\cdot(-4)+3\cdot(-4)^2\right]=18432>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-\frac{5}{2}$**:**

$$f'\left(-\frac{5}{2}\right)=3\left[3\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^3\right]^2\bullet\left[6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+3\left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]=\frac{28125}{256}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle x = –1:

$$f'(-1)=3\left[3(-1)^2+(-1)^3\right]^2\bullet\left[6(-1)+3(-1)^2\right]=-36<0$$

Erste Ableitung an der Stelle x = 1:

$$f'(1)=3\left(3(1)^2+(1)^3\right)^2\bullet\left(6(1)+3(1)^2\right)=48\bullet 9=432>0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	-4	positiv	steigt	
-3	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
-3 bis -2	$-\frac{5}{2}$	positiv	steigt	
-2	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
-2 bis 0	-1	negativ	fällt	
0	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Minimum
0 bis ∞	1	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, ob x = –3 , x = –2 bzw. x = 0 ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist:

Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle $x=-3$ *steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-3 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x=-2$ *steigt und danach fällt, hat sie bei* $\boxed{x=-2 \text{ ein Maximum}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x=0$ *fällt und danach steigt, hat sie bei* $\boxed{x=0 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema und *Sattelpunkte berechnet :*

$x = -3$ (Sattelpunkt)
$x = -2$ (Maximum)
$x = 0$ (Minimum)

Um die y - Koordinate des Sattelpunktes zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \left(3x^2 + x^3\right)^3$

$$f(-3) = \left(3 \cdot (-3)^2 + (-3)^3\right)^3 = \boxed{0}$$

$$f(-2) = \left(3 \cdot (-2)^2 + (-2)^3\right)^3 = \boxed{64}$$

$$f(0) = \left(3 \cdot 0^2 + 0^3\right)^3 = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat fo lg ende Extrema und Sattelpunkte :

Sattelpunkt $(-3/0)$
Maximum $(-2/64)$
Minimum $(0/0)$

Graph: