Übungen zum Thema:

Extrempunkte ganzrationaler Funktionen

Lösungsmethode:

Überprüfung der 2.Ableitung

Version:

Ungeprüfte Testversion vom 8.9.2007 / 21.30 h

Übungen: Extrem- und Sattelpunkte ganzrationaler Funktionen

1. Finde **lokale Extrema** der unten aufgeführten **ganzrationalen Funktionen**.
Berechne diese Punkte mit Hilfe der **Methode: Untersuchung der 2.Ableitung**.

1a)	$f(x)=x^2-8x+2$	**1 Extremum**
1b)	$f(x)=x^2+2x+3$	**1 Extremum**
1c)	$f(x)=x^3-9x^2+15x-3$	**2 Extrema**
1d)	$f(x)=3x^5-125x^3+2160x$	**4 Extrema**
1e)	$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$	**3 Extrema**
1f)	$f(x)=3x^3-9x^2-27x+30$	**2 Extrema**
1g)	$f(x)=x^3-3x+5$	**2 Extrema**
1h)	$f(x)=x^4+32x+49$	**1 Extremum**
1i)	$f(x)=x^4-32x+33$	**1 Extremum**
1j)	$f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$	**2 Extrema**
1k)	$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$	**2 Extrema**
1L)	$f(x)=x^3+3x^2-9x+13$	**2 Extrema**
1m)	$f(x)=2x^3-9x^2+12x$	**2 Extrema**

Lösung zu 1a

Gegeben :

$f(x) = x^2 - 8x + 2$

Gesucht :

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen :

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = x^2 - 8x + 2$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = (x^2)' - (8x)' + (2)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 2x - 8 + 0$

Vereinfachen :

$f'(x) = 2x - 8$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$2x - 8 = 0$

Wir lösen diese lineare Gleichung durch Auflösen nach x :

$2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

Die Stelle $x = 4$ ist ein mögliches Extremum / Sattelpunkt.
Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Die 2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 2x - 8$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = (2x)' - (8)'$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweil die Potenzregel an:

$f''(x) = 2 - 0$

Vereinfachen :

$f''(x) = 2$

Die 2. Ableitung untersuchen :

Wir untersuchen nun, welchen Wert die zweite Ableitung an de Nullstelle der ersten Ableitung hat. Die 2.Ableitung lautete :

$$f''(x) = 2$$

Da die zweite Ableitung eine konstante Funktion ist, hat sie stets den gleichen, positiven Wert 2, also auch an der Stelle des möglichen Extremums / Sattelpunktes $x = 4$. Folglich liegt bei $x = 4$ ein Minimum vor.

y – Koordinaten des Minimums berechnen :

Nun die gefundenen x-Koordinaten des Minimums (x=4) in die gegebene Gleichung einsetzen, um die y-Koordinate des Minimums zu berechnen:

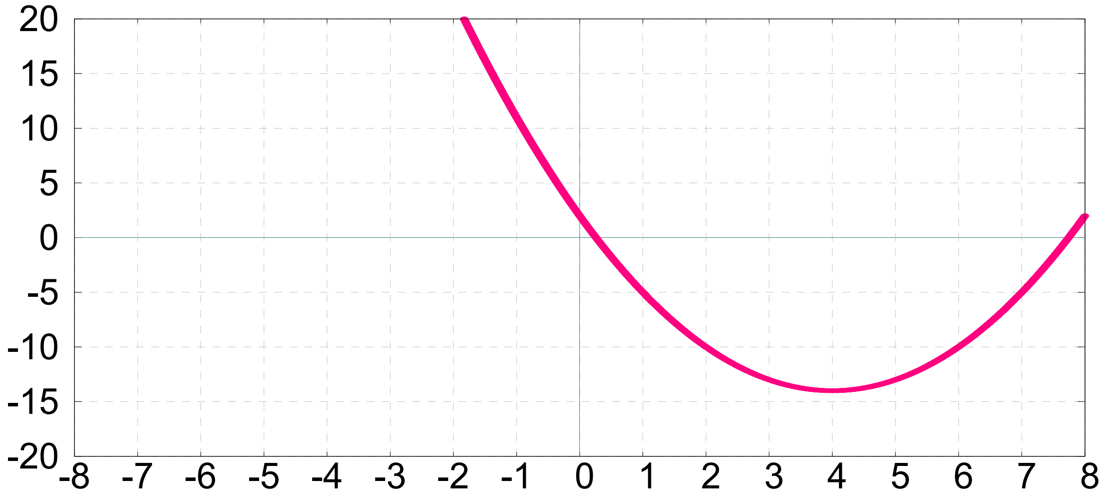
Gegebene Gleichung $f(x)$:	Gegebene Gleichung $f(x)$ an der Stelle des Minimums ($x = 4$)
$f(x) = x^2 - 8x + 2$	$f(\mathbf{4}) = (\mathbf{4})^2 - 8 \cdot (\mathbf{4}) + 2 = -14$

Das lokale Minimum hat die Koordinaten $(4/-14)$

Ergebnis :

Die Funktion $\mathbf{f(x) = x^2 - 8x + 2}$ *hat bei* $\mathbf{(4/-14)}$ *ein lokales Minimum, jedoch keine lokalen Maxima oder Sattelpunkte(Terassenpunkte).*

Zusatzhinweis :
Das die Funktion keinen Sattelpunkt hat, hätten wir uns auch ohne Rechung überlegen können : Quadratische Funktionen haben als Graphen eine Parabel, und Parabeln haben niemals einen Sattelpunkt. Außerdem haben Parabeln stets nur ein Extremum.



Lösung zu 1b

Gegeben:

$f(x) = x^2 + 2x + 3$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = x^2 + 2x + 3$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(x^2\right)' + (2x)' + (3)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 2x + 2 + 0$

Vereinfachen:

$f'(x) = 2x + 2$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$\boxed{2x + 2 = 0}$

Wir lösen diese lineare Gleichung durch Auflösen nach x:

$2x + 2 = 0$

$2x = -2$

$x = -1$

Die Stelle $x = 1$ ist ein mögliches Extremum / Sattelpunkt.
Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

Die 2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 2x + 2$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = (2x)' + (2)'$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweil die Potenzregel an:

$f''(x) = 2 + 0$

Vereinfachen:

$f''(x) = 2$

Zweite Ableitung untersuchen:

Wir untersuchen nun, welchen Wert die zweite Ableitung an de Nullstelle der ersten Ableitung hat. Die 2.Ableitung lautete:

$$f''(x) = 2$$

Da die zweite Ableitung eine konstante Funktion ist, hat sie stets den gleichen, positiven Wert 2, also auch an der Stelle des möglichen Extremums / Sattelpunktes $x = -1$. Folglich liegt bei $x = -1$ ein Minimum vor.

y – Koordinaten des Minimums berechnen:

Nun die gefundenen x-Koordinaten des Minimums (x=–1) in die gegebene Gleichung einsetzen, um die y-Koordinate des Minimums zu berechnen:

Gegebene Gleichung $f(x)$:	Gegebene Gleichung $f(x)$ an der Stelle des Minimums ($x = -1$)
$f(x) = x^2 + 2x + 3$	$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = \mathbf{2}$

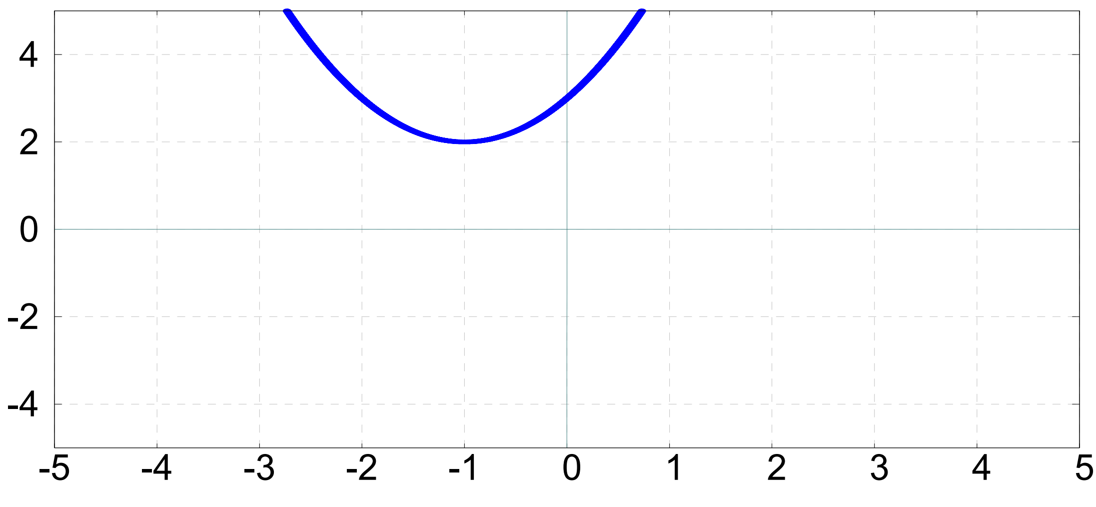
Das lokale Minimum hat die Koordinaten $(-1/2)$

Ergebnis:

Die Funktion $\mathbf{f(x) = x^2 + 2x + 3}$ hat bei $(\mathbf{-1/2})$ ein lokales Minimum, jedoch keine lokalen Maxima oder Sattelpunkte(Terassenpunkte).

Zusatzhinweis:
Das die Funktion keinen Sattelpunkt hat, hätten wir uns auch ohne Rechung überlegen können: Quadratische Funktionen haben als Graphen eine Parabel, und Parabeln haben niemals einen Sattelpunkt. Außerdem haben Parabeln stets nur ein Extremum.

Graph der Funktion:



Lösung zu 1c

Gegeben :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

Gesucht :

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen :

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(x^3\right)' - \left(9x^2\right)' + \left(15x\right)' - \left(3\right)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 - 0$

Vereinfachen :

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$3x^2 - 18x + 15 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm 12}{6}$$

$$x_{1,2} = 1 \text{ oder } 5$$

Die Stellen $\underline{x = 1 \text{ und } x = 5}$ sind mögliche Extrema / Sattelpunkte. Diese müssen wir nun weiter untersuchen.

Die 2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = \left(3x^2\right)' - \left(18x\right)' + \left(15\right)'$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweil die Potenzregel an:

$f''(x) = 6x - 18 + 0$

Vereinfachen :

$f''(x) = 6x - 18$

Zweite Ableitung untersuchen:

Wir untersuchen nun, welchen Wert die zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x - 18$$

an den möglichen Extrem / Sattelpunkten $x = 1$ und $x = 5$ hat:

$x = 1$
$f''(1) = 6 \cdot 1 - 18$
$f''(1) = -12$
zweite Ableitung negativ $\Rightarrow$
$x = 1$ *ist lokales Maximum*

$x = 5$
$f''(5) = 6 \cdot 5 - 18$
$f''(5) = 30 - 18$
$f''(5) = 12$
zweite Ableitung positiv $\Rightarrow$
$x = 5$ *ist lokales Minimum*

y – Koordinaten der Extrema berechnen:

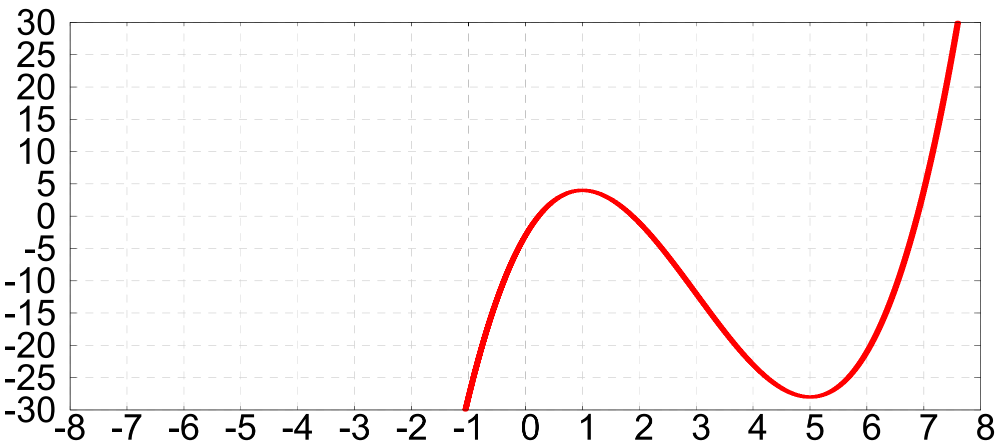
Die gefundenen x-Koordinaten des Maximums (x=1) und des Minimums (x=5) in die gegebene Gleichung einsetzen, um die y-Koordinaten der Extrema zu berechnen:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 3$
$f(1) = 4$
Das lokale Maximum hat die Koordinaten $(1/4)$

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 - 3$
$f(5) = 125 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 - 3$
$f(5) = -28$
Das lokale Minimum hat die Koordinaten $(5/-28)$

Ergebnis:

$(5/-28)$ *ist ein lokales Minimum,* $(1/4)$ *ist ein lokales Maximum*



Lösung zu 1d

Gegeben:

$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = (3x^5)' - (125x^3)' + (2160x)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 15x^4 - 375x^2 + 2160$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null.
Es entsteht eine biquadratische Gleichung 4.Grades,
die wir durch die Substitution $x^2 = z$ auf eine
quadratische Gleichung zurückführen, die wir mit
der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen können:

$15x^4 - 375x^2 + 2160 = 0$

$15z^2 - 375z + 2160 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 16 \text{ oder } z = 9$

Rücksubstitution:

$x^2 = z \qquad x^2 = z$

$x^2 = 9 \qquad x^2 = 16$

$x = \pm 3 \qquad x = \pm 4$

Die Stellen $\underline{x = \pm 3}$ und $\underline{x = \pm 4}$ sind mögliche Extrema / Sattelpunkte
Diese Stellen untersuchen wir nun mit Hilfe der 2.Ableitung.

Die 2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 15x^4 - 375x^2 + 2160$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = (15x^4)' - (375x^2)' + (2160)'$

Jetzt wenden wir auf jeden der Summanden die Potenzregel an:

$f''(x) = 60x^3 - 750x + 0$

Vereinfachen:

$f''(x) = 60x^3 - 750x$

2.Ableitung untersuchen:

Wir untersuchen nun, welchen Wert die zweite Ableitung

$$f''(x) = 60x^3 - 750x$$

an den Nullstellen der 1.Ableitung hat, d.h. an den vier möglichen Extrema / Sattelpunkten $x = \pm 3$ *und* $x = \pm 4$ *:*

$x = -3$ $f''(-3) = 60 \cdot (-3)^3 - 750 \cdot (-3)$ $f''(-3) = -1620 + 2250$ $f''(-3) = 630$ *zweite Ableitung positiv* $\Rightarrow$ $x = -3$ *ist lokales Minimum*	$x = 3$ $f''(3) = 60 \cdot (3)^3 - 750 \cdot (3)$ $f''(3) = 1620 - 2250$ $f''(3) = -630$ *zweite Ableitung negativ* $\Rightarrow$ $x = 3$ *ist lokales Maximum*
$x = -4$ $f''(-4) = 60 \cdot (-4)^3 - 750 \cdot (-4)$ $f''(-4) = -3840 + 3000$ $f''(-4) = -840$ *zweite Ableitung negativ* $\Rightarrow$ $x = -4$ *ist lokales Maximum*	$x = 4$ $f''(4) = 60 \cdot (4)^3 - 750 \cdot (4)$ $f''(4) = 3840 - 3000$ $f''(4) = 840$ *zweite Ableitung positiv* $\Rightarrow$ $x = 4$ *ist lokales Minimum*

y–Koordinaten der Extrema berechnen:

$$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x \Rightarrow f(-3) = 3(-3)^5 - 125(-3)^3 + 2160(-3) = -3834$$

$$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 3^5 - 125 \cdot 3^3 + 2160 \cdot 3 = 3834$$

$$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x \Rightarrow f(-4) = 3 \cdot (-4)^5 - 125 \cdot (-4)^3 + 2160 \cdot (-4) = -3712$$

$$f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x \Rightarrow f(4) = 3 \cdot 4^5 - 125 \cdot 4^3 + 2160 \cdot 4 = 3712$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema:

Zwei lokale Minima : $(-3/-3834)$ *und* $(4/3712)$

Zwei lokale Maxima : $(3/3834)$ *und* $(-4/-3712)$

Lösung zu 1e

Gegeben :

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

Gesucht :

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen :

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(x^4\right)' - \left(8x^3\right)' + \left(22x^2\right)' - \left(24x\right)' + \left(12\right)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 + 0$

Vereinfachen :

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine Gleichung 3.Grades. Da man in der Schulmathematik die Lösungsformel für Gleichungen 3.Grades nicht lernt, müssen wir eine andere Methode versuchen, um die Gleichung 3.Grades zu lösen : Wir erinnern uns an einen Satz aus der Algebra : "Hat eine ganzrationale Funktion ganzzahlige Lösungen, dann sind sie unter den Teilern des Absolutgliedes zu finden". Wir lösen die Gleichung also durch Probieren, indem wir die "Teiler des Absolutgliedes" der Reihe nach in die Gleichung einsetzen :

$4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$	*Zuerst teilen wir die Gleichung durch 4, um die Rechnung übersichtlich zu halten*
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$	*Die Teiler des Absolutgliedes (6) sind die Zahlen : 1,2,3,6,–1,–2,–3,–6. Wir setzen diese Zahlen der Reihe nach in die Gleichung ein. Beachte, dass eine Gleichung 3.Grades maximal 3 Lösungen haben kann, d.h. wenn du drei Lösungen gefunden hast, kannst du aufhören zu probieren.*

Durch Probieren erhalten wir die Lösungen $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$:

$\mathbf{1}^3 - 6 \cdot \mathbf{1}^2 + 11 \cdot \mathbf{1} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$

$\mathbf{2}^3 - 6 \cdot \mathbf{2}^2 + 11 \cdot \mathbf{2} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$

$\mathbf{3}^3 - 6 \cdot \mathbf{3}^2 + 11 \cdot \mathbf{3} - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$

Die 2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = (4x^3)' - (24x^2)' + (44x)' - (24)'$

Jetzt wenden wir auf jeden der Summanden die Potenzregel an:

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44 + 0$

Vereinfachen :

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

2.Ableitung untersuchen :

Wir setzen die Nullstellen der 1.Ableitung (x=1, x=2, x=3) in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 44 = 8 \qquad 8 > 0 \quad \Rightarrow$ **x = 1 ist ein Minimum**

$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 44 = -4 \qquad -4 < 0 \quad \Rightarrow$ **x = 2 ist ein Maximum**

$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 44 = 8 \qquad 8 > 0 \quad \Rightarrow$ **x = 3 ist ein Minimum**

y-Werte der Extrema berechnen:

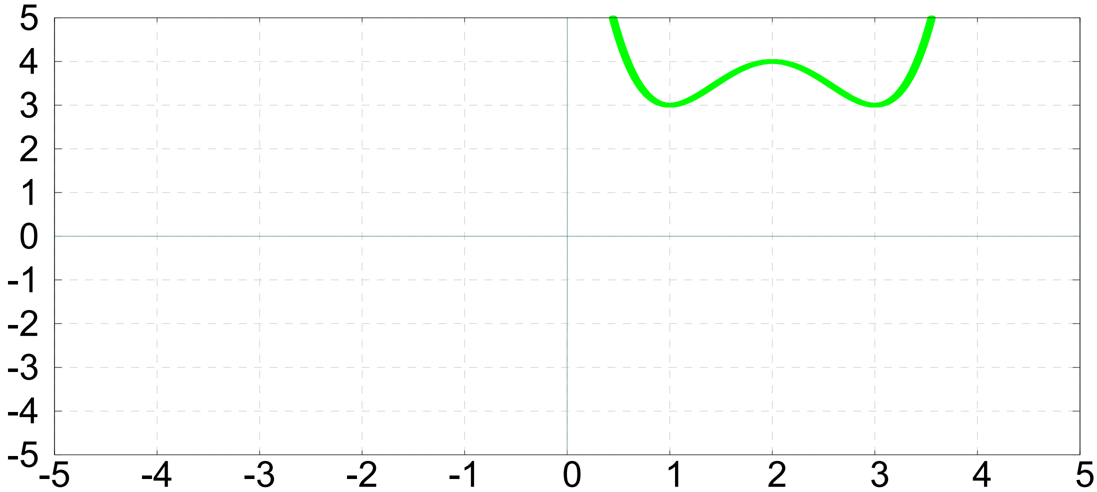
Die x-Koordinaten der Extrema sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte zu berechnen. Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema in die gegebene Funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ ein:

$x = 1$	Minimum	$f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 22 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 12 = 3$
$x = 2$	Maximum:	$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 22 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 12 = 4$
$x = 3$	Minimum	$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 22 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 12 = 3$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ *hat folgende drei Extrema :*
Lokales Minimum : $(1/3)$
Lokales Maximum : $(2/4)$
Lokales Minimum : $(3/3)$
Die Funktion hat keinen Sattelpunkt.

Graph der Funktion:



Lösung zu 1f

Gegeben :

$f(x)=3x^3-9x^2-27x+30$

Gesucht :

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen :

Gegeben ist die Funktion:

$f(x)=3x^3-9x^2-27x+30$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x)=\left(3x^3\right)'-\left(9x^2\right)'-\left(27x\right)'+\left(30\right)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x)=9x^2-18x-27+0$

Vereinfachen :

$f'(x)=9x^2-18x-27$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine quadratische Gleichung. Diese lösen wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$9x^2-18x-27=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot9\cdot(-27)}}{2\cdot9}=\frac{18\pm36}{18}$$

Es ergeben sich als mögliche Stellen für lokale Extrema / Sattelpunkte : $x=-1$ *und* $x=3$

Die 2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x)=9x^2-18x-27$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x)=\left(9x^2\right)'-\left(18x\right)'-\left(27\right)'$

Jetzt wenden wir auf jeden der Summanden die Potenzregel an:

$f''(x)=18x-18-0$

Vereinfachen :

$f''(x)=18x-18$

Die 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen x=–1 und x=3 in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\mathbf{f''(x) = 18x - 18}$

$$f''(-1) = 18 \cdot (-1) - 18 = -36 \qquad -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ ist ein Maximum}$$
$$f''(3) = 18 \cdot (3) - 18 = 36 \qquad 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ ist ein Minimum}$$

y-Werte der Extrema berechnen:

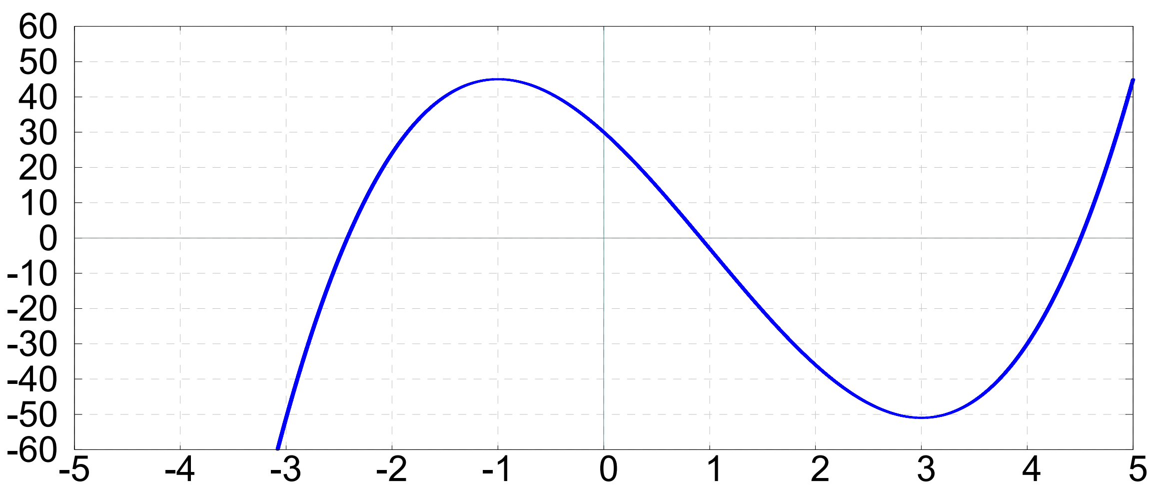
Die x-Koordinaten der Extrema sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte zu berechnen. Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema in die gegebene Funktion ein, d.h. in die Funktion: $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$:

$x = -1$	Maximum:	$f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 27 \cdot (-1) + 30 = 45$
$x = 3$	Minimum	$f(3) = 3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 + 30 = -51$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$ *hat folgende zwei Extrama :*
Lokales Maximum : $(-1/45)$
Lokales Minimum : $(3/-51)$
Die Funktion hat keinen Sattelpunkt.

Graph der Funktion:



Lösung zu 1g

Gegeben:

$f(x) = x^3 - 3x + 5$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion:

$f(x) = x^3 - 3x + 5$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = (x^3)' - (3x)' + (5)'$

Jetzt wenden wir auf jeden einzelnen Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 3x^2 - 3 + 0$

Vereinfachen:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine rein-quadratische Gleichung. Diese lösen wir durch Umstellen der Formel nach x:

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{3} = 1$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$

$|x| = 1$

$x = \pm 1$

Es ergeben sich als mögliche Stellen für lokale Extrema / Sattelpunkte: $x = -1$ *und* $x = 1$

Die 2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Wir wenden die Summenregel an, um die 2.Ableitung zu bestimmen:

$f''(x) = (3x^2)' - (3)'$

Jetzt wenden wir auf jeden der Summanden die Potenzregel an:

$f''(x) = 6x - 0$

Vereinfachen:

$f''(x) = 6x$

2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x = -1$ und $x = 1$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete : $f''(x) = 6x$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 \qquad -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ **ist ein Maximum**

$f''(+1) = 6 \cdot (+1) = 6 \qquad 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = +1$ **ist ein Minimum**

y-Werte der Extrema berechnen:

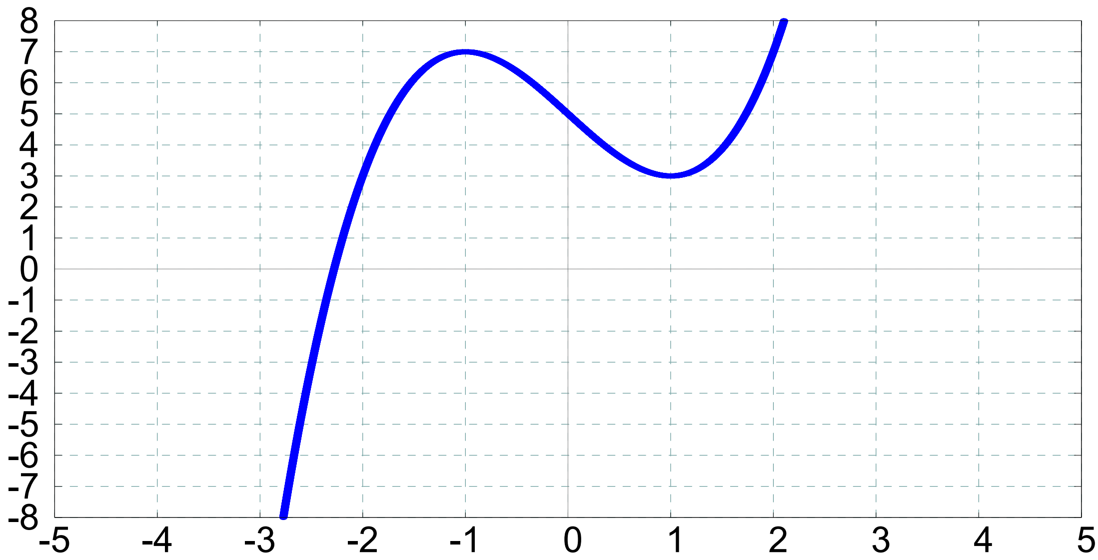
Die x-Koordinaten der Extrema sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte zu berechnen. Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema in die gegebene Funktion ein, d.h. in die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **:**

$x = -1$	*Maximum:*	$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 5 = 7$
$x = +1$	*Minimum*	$f(+1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 5 = 3$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 5$ *hat folgende zwei Extrama :*
Lokales Maximum : $(-1/7)$
Lokales Minimum : $(1/3)$
Die Funktion hat keinen Sattelpunkt.

Graph der Funktion:



Lösung zu 1h

Gegeben :

$f(x) = x^4 + 32x + 49$

Gesucht :

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen :

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion : Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel :

Die gegebene Funktion lautet :

$f(x) = x^4 + 32x + 49$

Wir wenden die Summenregel an :

$f'(x) = \left(x^4\right)' + \left(32x\right)' + \left(49\right)'$

Nun wenden wir die Potenzregel an :

$f'(x) = 4x^3 + 32 + 0$

Vereinfachen :

$f'(x) = 4x^3 + 32$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null :

$4x^3 + 32 = 0$

Wir lösen diese kubische Gleichung :

$4x^3 + 32 = 0$

Auf beiden Seiten 32 subtrahieren :

$4x^3 = -32$

Beide Seiten durch 4 teilen :

$x^3 = -8$

Quadrieren der Gleichung :

$\left(x^3\right)^2 = \left(-8\right)^2$

$x^6 = 64$

Löse die Potenzgleichung durch Wurzelziehen :

$x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

Die Probe ergibt, dass nur $x = -2$ eine Lösung ist.

Die <u>Stelle $x = -2$</u> Nullstelle der 1.Ableitung und daher ein mögliches Extremum / Sattelpunkt. Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 4x^3 + 32$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = \left(4x^3\right)' + \left(32\right)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 12x^2 + 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 12x^2$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x = -2$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\boldsymbol{f''(x) = 12x^2}$

$\mathbf{f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 = 48 \qquad 48 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2}$ **ist ein Minimum**

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :

$x = -2$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^4 + 32x + 49$

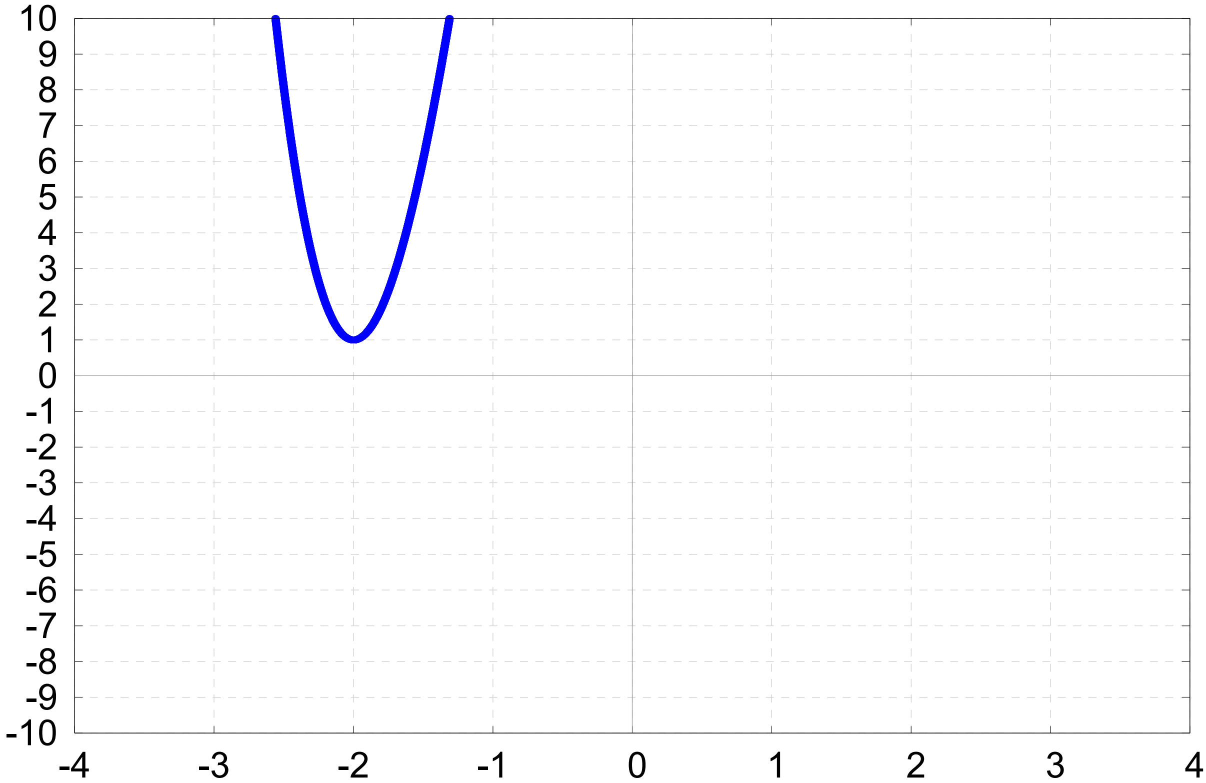
$f(\mathbf{-2}) = f(x) = (\mathbf{-2})^4 + 32 \cdot (\mathbf{-2}) + 49 = \boxed{1}$

Ergebnis:

Das Minimum der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(-2 \,/\, 1)$ *ist ein Minimum*

Graph:



Lösung zu 1i

Gegeben:

$f(x) = x^4 - 32x + 33$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = x^4 - 32x + 33$

Um die 1.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$f'(x) = \left(x^4\right)' - \left(32x\right)' + \left(33\right)'$

Nun wenden wir - auf jeden Summanden - die Potenzregel an:

$f'(x) = 4x^3 - 32 + 0$

Wir vereinfachen:

$f'(x) = 4x^3 - 32$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$\boxed{4x^3 - 32 = 0}$

Wir lösen diese kubische Gleichung:

Auf beiden Seiten 32 addieren:

$4x^3 = 32$

Beide Seiten durch 4 teilen:

$x^3 = 8$

Löse die Potenzgleichung durch Wurzelziehen:

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

Die Stelle $\underline{x = 2}$ *ist ein mögliches Extremum / Sattelpunkt.*
Diese Stelle müssen wir nun weiter untersuchen.

2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 4x^3 - 32$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = \left(4x^3\right)' - (32)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 12x^2 - 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 12x^2$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x = 2$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\boldsymbol{f''(x) = 12x^2}$

$$\mathbf{f''(2) = 12 \cdot (2)^2 = 48 \qquad 48 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ ist ein Minimum}}$$

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :
$x = 2$ *ein Minimum*

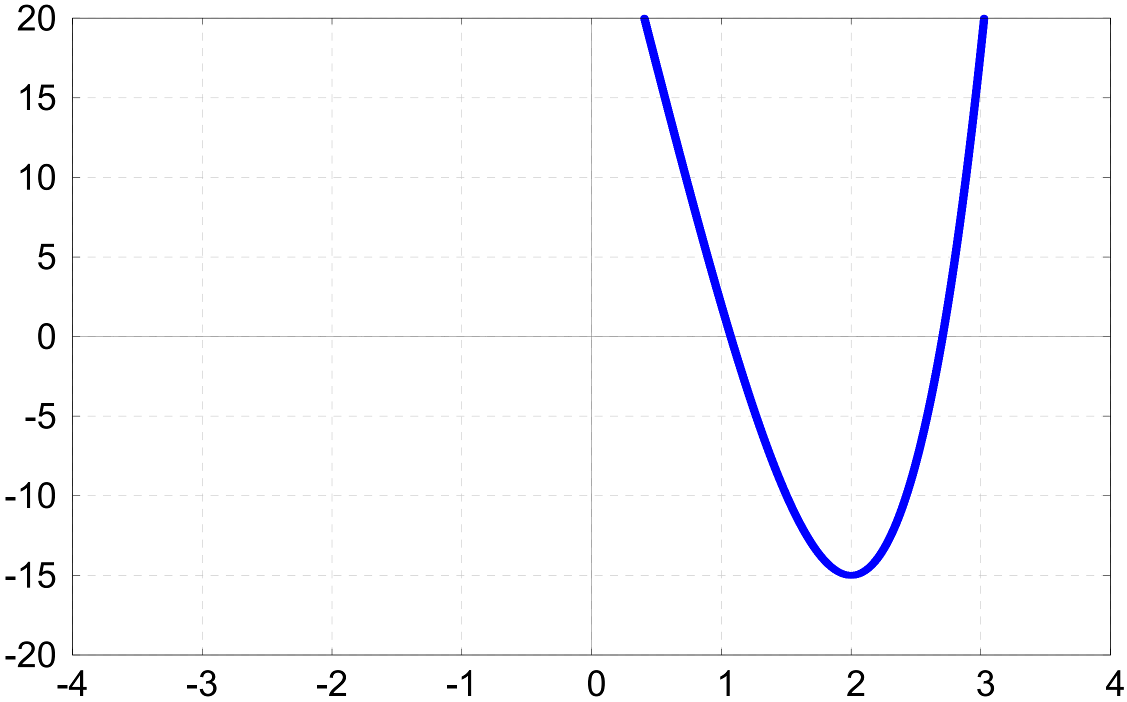
Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x) = x^4 - 32x + 33$

$f(\mathbf{2}) = f(x) = \mathbf{2}^4 - 32 \cdot \mathbf{2} + 33 = \boxed{-15}$

Ergebnis:

Das Minimum der Funktion hat folgende Koordinaten :
$(2 \,/\, -15)$ *ist ein Minimum*

Graph:



Lösung zu 1j

Gegeben:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(2x^3\right)' - \left(3x^2\right)' - \left(12x\right)' + \left(5\right)'$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$6x^2 - 6x - 12 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6} = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{12} = \frac{6 \pm 18}{12}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Die Stellen $\underline{x_1 = 2}$ *und* $\underline{x_2 = -1}$ *sind mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.*

2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = (6x^2)' - (6x)' - (12)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 12x - 6 - 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 12x - 6$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x = -1$ bzw. $x=2$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete : $f''(x) = 12x - 6$

$f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$	$-18 < 0$	$\Rightarrow$	$x = -1$ ist ein Maximum
$f''(2) = 12 \cdot (2) - 6 = 18$	$18 > 0$	$\Rightarrow$	$x = 2$ ist ein Minimum

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -1$ *ein Maximum*
$x = 2$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

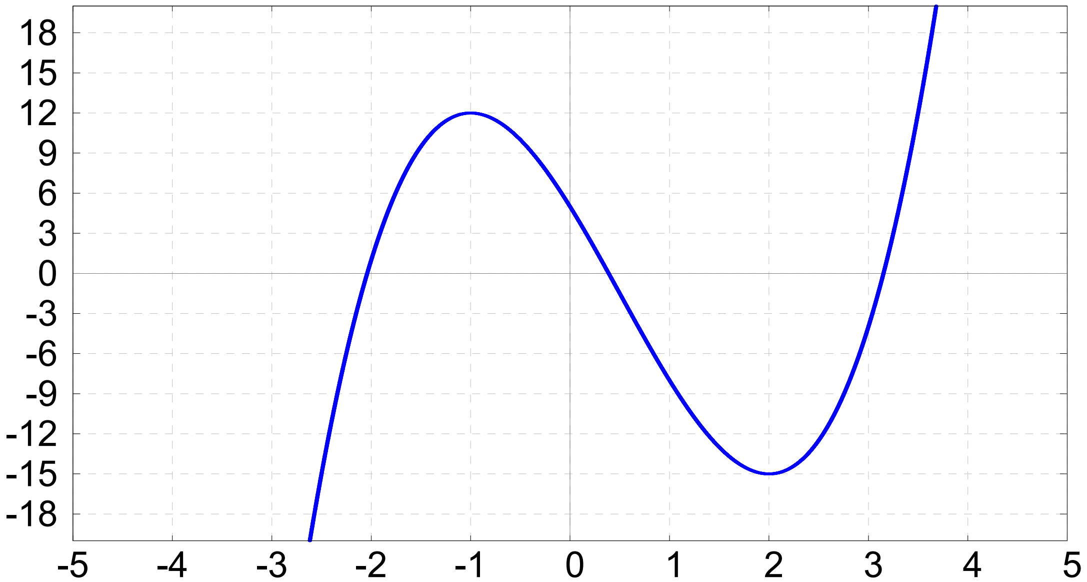
$f(\mathbf{-1}) = 2 \cdot (\mathbf{-1})^3 - 3 \cdot (\mathbf{-1})^2 - 12 \cdot (\mathbf{-1}) + 5 = \boxed{12}$
$f(\mathbf{2}) = 2 \cdot \mathbf{2}^3 - 3 \cdot \mathbf{2}^2 - 12 \cdot \mathbf{2} + 5 = \boxed{-15}$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(-1/12)$
Minimum bei $(2/-15)$

Graph:



Lösung zu 1k

Gegeben:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(x^3\right)' - \left(6x^2\right)' + \left(9x\right)' + \left(1\right)'$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Die Stellen $\underline{x_1 = 1}$ *und* $\underline{x_2 = 3}$ *sin d mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte.*

Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

2.Ableitung berechnen:

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = \left(3x^2\right)' - (12x)' + (9)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 6x - 12 + 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x = 1$ bzw. $x=3$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\boldsymbol{f''(x) = 6x - 12}$

$\mathbf{f''(1) = 6 \cdot (1) - 12 = -6}$	$\mathbf{-6 < 0}$	$\Rightarrow$	**$x = 1$ ist ein Maximum**
$\mathbf{f''(3) = 6 \cdot (3) - 12 = 6}$	$\mathbf{6 > 0}$	$\Rightarrow$	**$x = 3$ ist ein Minimum**

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = 1$ *ein Maximum*
$x = 3$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^3 - 6 \cdot \mathbf{1}^2 + 9 \cdot \mathbf{1} + 1 = \boxed{5}$

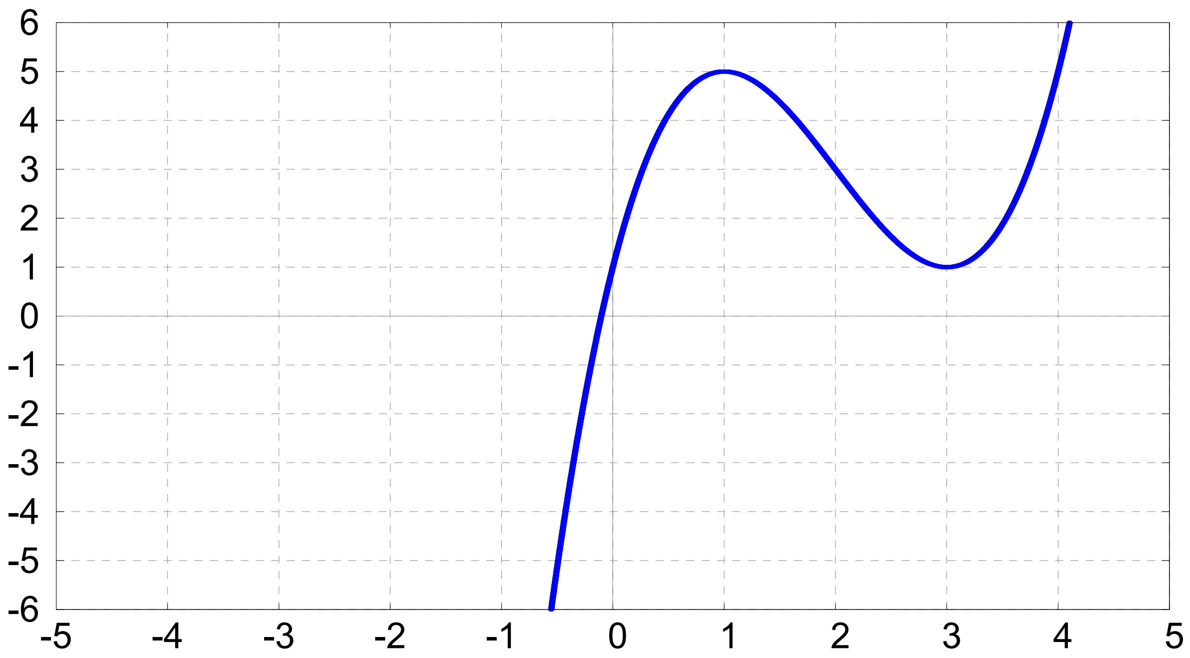
$f(\mathbf{3}) = \mathbf{3}^3 - 6 \cdot \mathbf{3}^2 + 9 \cdot \mathbf{3} + 1 = \boxed{1}$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(1/5)$
Minimum bei $(3/1)$

Graph:



Lösung zu 1L

Gegeben:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 13$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 13$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(x^3\right)' + \left(3x^2\right)' - \left(9x\right)' + \left(13\right)'$

Nun wenden wir auf jeden Summanden die Potenzregel an:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{-6 \pm 12}{6}$$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

Die Stellen $\underline{x_1 = -3}$ *und* $\underline{x_2 = 1}$ *sind mögliches Extrema bzw. Sattelpunkte.*

Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = \left(3x^2\right)' + \left(6x\right)' - \left(9\right)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 6x + 6 + 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 6x + 6$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen $x = -3$ bzw. $x=1$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete : $\boldsymbol{f''(x) = 6x + 6}$

$f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 6 = -12$	$-12 < 0$	$\Rightarrow$	**$x = -3$ ist ein Maximum**
$f''(1) = 6 \cdot (1) + 6 = 12$	$12 > 0$	$\Rightarrow$	**$x = 1$ ist ein Minimum**

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x=-3$ *ein Maximum*
$x=1$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x)=x^3+3x^2-9x+13$

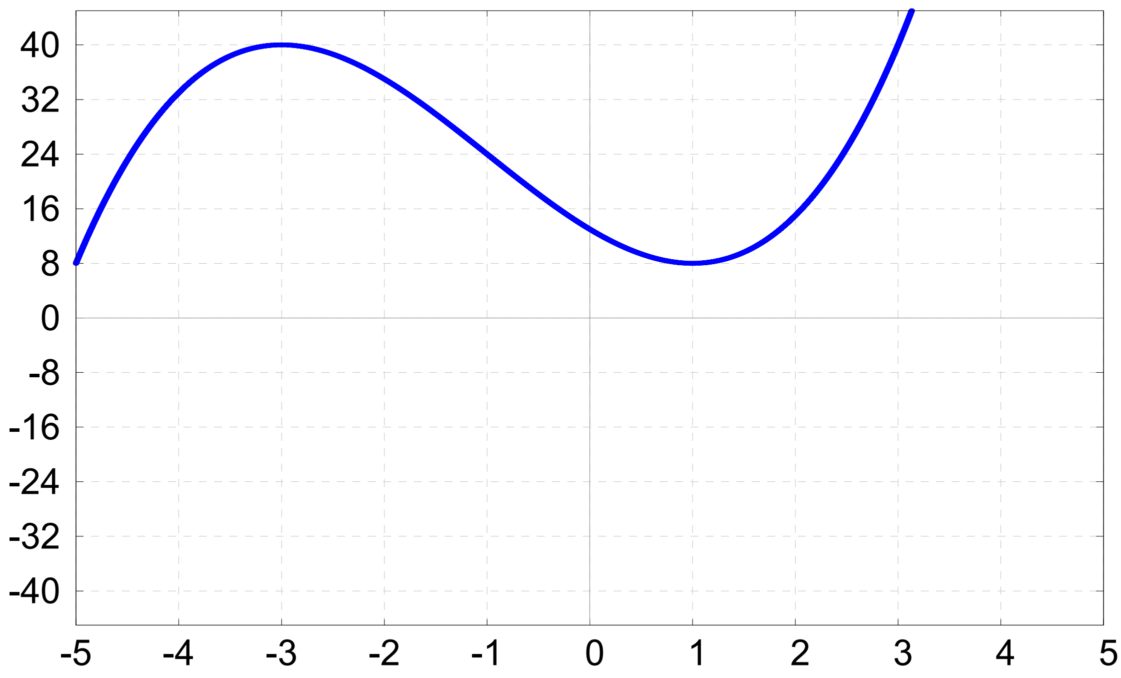
$$f(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)+13=\boxed{40}$$
$$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-9\cdot 1+13=\boxed{8}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema :

Maximum bei $(-3/40)$
Minimum bei $(1/8)$

Graph:



Lösung zu 1m

Gegeben:

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1.Ableitung der gegebenen Funktion: Dazu wenden wir zuerst die Summenregel an, und danach die Potenzregel:

Die gegebene Funktion lautet:

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Wir wenden die Summenregel an:

$f'(x) = \left(2x^3\right)' - \left(9x^2\right)' + \left(12x\right)'$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$6x^2 - 18x + 12 = 0$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{12} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Die Stellen $\underline{x_1 = 1}$ und $\underline{x_2 = 2}$ sind mögliche Extrema bzw. Sattelpunkte. Diese Stellen müssen wir nun weiter untersuchen.

2.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung haben wir bereits berechnet:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

Um die 2.Ableitung zu berechnen, wenden wir zuerst die Summenregel an.
Dies bedeutet, dass wir jeden Summanden einzeln ableiten:

$$f''(x) = \left(6x^2\right)' - \left(18x\right)' + \left(12\right)'$$

Jetzt wenden wir auf die Summanden jeweils die Potenzregel an:

$$f''(x) = 12x - 18 + 0$$

Wir vereinfachen:

$$f''(x) = 12x - 18$$

Wert der 2.Ableitung an der Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Wir setzen $x = 1$ bzw. $x=2$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete : $\boldsymbol{f''(x) = 12x - 18}$

$f''(1) = 12 \cdot (1) - 18 = -6$	$-6 < 0$	$\Rightarrow$	**x = 1 ist ein Maximum**
$f''(2) = 12 \cdot (2) - 18 = 6$	$6 > 0$	$\Rightarrow$	**x = 2 ist ein Minimum**

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x-Koordinaten der Extrema berechnet:

$x = 1$ *ein Maximum*
$x = 2$ *ein Minimum*

Um die y-Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die jeweilige x-Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$$f(\mathbf{1}) = 2 \cdot \mathbf{1}^3 - 9 \cdot \mathbf{1}^2 + 12 \cdot \mathbf{1} = \boxed{5}$$
$$f(\mathbf{2}) = 2 \cdot \mathbf{2}^3 - 9 \cdot \mathbf{2}^2 + 12 \cdot \mathbf{2} = \boxed{4}$$

Ergebnis:

Die Funktion hat folgende Extrema:

Maximum bei $(1/5)$
Minimum bei $(2/4)$

Graph: