Übungen zum Thema:

Extrem– und Sattelpunkte ganzrationaler Funktionen

Lösungsmethode:

Kombination aus den Methoden “2.Ableitung“ und „Tabellenmethode“

Version:

Ungeprüfte Testversion vom 6.9.2007 / 21.15 h

Übungen: Extrem- und Sattelpunkte ganzrationaler Funktionen

1. Finde lokale Extrema und Sattelpunkte der **ganzrationalen Funktionen**.
Versuche diese Punkte zuerst mit der Methode **„Untersuchung der 2.Ableitung**“ zu finden.
Benutze das **Tabellenverfahren** nur für die Stellen, für welche die Methode “2.Ableitung“ kein Ergebnis liefert (d.h. 2.Ableitung ist Null) **:**

1a)	$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$	**2 Extrema + 1 Sattelpunkt**
1b)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$	**1 Sattelpunkt**
1c)	$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$	**1 Sattelpunkt**
1d)	$f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$	**2 Extrema + 1 Sattelpunkt**
1e)	$f(x) = x(4 - x)^3$	**1 Extremum + 1 Sattelpunkt**
1f)	$f(x) = 4(x-1)^3 + (x-1)^4$	**1 Extremum + 1 Sattelpunkt**

Die Lösungswege beginnen auf der nächsten Seite ...

Lösung zu 1a

Gegeben: $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. und 2.Ableitung der gegebenen Funktion :

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine Gleichung 4.Grades, die wir durch ausklammern von x^2 auf zwei quadratische Gleichungen zurückführen. Diese lösen wir durch Wurzelziehen bzw. mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \qquad \Big| \; x^2 \text{ ausklammern}$$

$$x^2\left(5x^2 - 20x + 15\right) = 0 \qquad \Big| \; \Rightarrow x_1 = 0 \text{ jetzt die Klammer mit Null gleichsetzen}$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0 \qquad \Big| \; \text{Lösungsformel für quadratische Gleichungen benutzen}$$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 15}}{2 \cdot 5} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{10} = \frac{20 \pm 10}{10}$$

Es ergeben sich drei Stellen als mögliche lokale Extrema bzw. als mögliche Sattelpunkte : 0, 1 und 3

2.Ableitung untersuchen:

Wir setzen die Nullstellen der 1.Ableitung (x=0, x=1, x=3) in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\mathbf{f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x}$

$\mathbf{f''(0) = 20 \cdot 0^3 - 60 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 = 0}$ $\Rightarrow$ **Keine Aussage möglich : x = 0 kann Extremum oder Sattelpunkt sein**

$\mathbf{f''(1) = 20 \cdot 1^3 - 60 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 = -10}$ $\Rightarrow$ **x = 1 ist ein Maximum**

$\mathbf{f''(3) = 20 \cdot 3^3 - 60 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 90}$ $\Rightarrow$ **x = 3 ist ein Minimum**

weiter auf der nächsten Seite

Unklare Stelle x=0 untersuchen:

Für die Stelle x=0 kann mit Hilfe der 2.Ableitung keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt. Wir müssen daher eine Tabelle anlegen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	?	?	?	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
1 bis 3	– – –	negativ	fällt	
3	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
3 bis ∞	– – –	positiv	steigt	

Wir müssen nun eine Stelle im Intervall $(-\infty, 0)$ *wählen (wir wählen* $x=-1$*)*
und berechnen die erste Ableitung (die Steigung) an dieser Stelle:

Erste Ableitung: $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

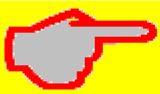
Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$*:* $f'(-1) = 5\cdot(-1)^4 - 20\cdot(-1)^3 + 15\cdot(-1)^2 = \underline{\underline{40}}$

Wir können nun die erste Zeile der Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	–1	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
1 bis 3	– – –	negativ	fällt	
3	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
3 bis ∞	– – –	positiv	steigt	

Schließlich können wir nun bestimmen, ob an der Stelle x=0 ein Extrema oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle x=0 horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle x=0 steigt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	–1	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ **Sattelpunkt**
0 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
1 bis 3	– – –	negativ	fällt	
3	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
3 bis ∞	– – –	positiv	steigt	

weiter auf der nächsten Seite 

y-Werte der Extrema und des Sattelpunkt berechnen:

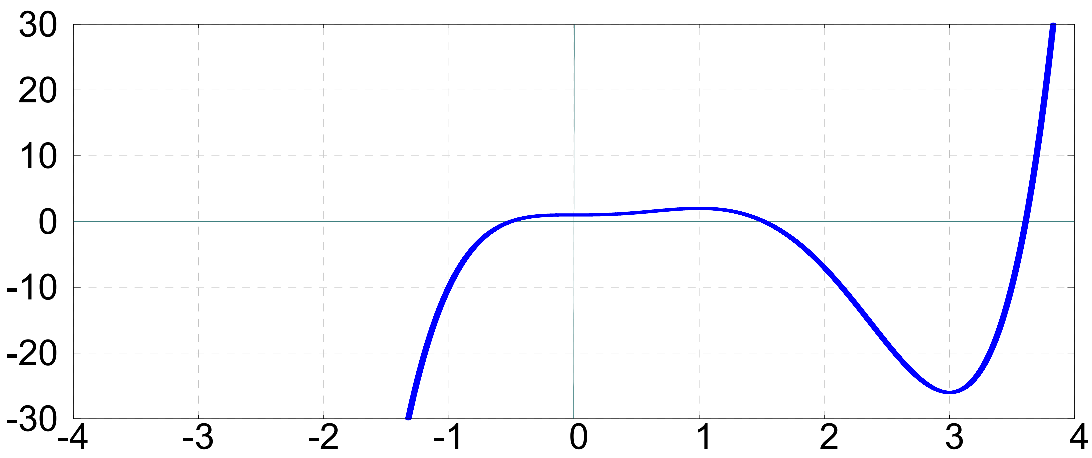
Die x-Koordinaten der Extrema und des Sattelpunktes sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte und Sattelpunkt zu berechnen.
Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema/Sattelpunkte in die gegebene Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ ein:

Sattelpunkt:	$x = 0$	$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^5 - 5 \cdot \mathbf{0}^4 + 5 \cdot \mathbf{0}^3 + 1 = 1$
Maximum:	$x = 1$	$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^5 - 5 \cdot \mathbf{1}^4 + 5 \cdot \mathbf{1}^3 + 1 = 2$
Minimum	$x = 3$	$f(\mathbf{3}) = \mathbf{3}^5 - 5 \cdot \mathbf{3}^4 + 5 \cdot \mathbf{3}^3 + 1 = -26$

Ergebnis:

Lokales Minimum : (3/–26)
Lokales Maximum : (1/2)
Sattelpunkt : (0/1)

Graph der Funktion:



Lösung zu 1b

Gegeben: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. und 2.Ableitung der gegebenen Funktion :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine quadratische Gleichung. Diese lösen wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = 1$$

Es ergibt sich als mögliche Stelle für ein lokales Extrema bzw. als möglichen Sattelpunkte : $x = 1$

Bestimmung der Extrema/Sattelpunkte:

Wir setzen x=1 in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\mathbf{f''(x) = 6x - 6}$

$\mathbf{f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0} \Rightarrow$ **Da sich der Wert 0 ergibt, ist keine Aussage möglich :**
x = 1 kann Extremum oder Terassenpunkt sein

Unklare Stelle x=1 untersuchen:

Für die Stelle x=1 kann (mit Hilfe der 2.Ableitung) keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Terassenpunkt handelt. Wir müssen daher die 1.Ableitung untersuchen und eine Tabelle anlegen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1				
1	— — —	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞				

Wie gesagt ist es unklar, ob bei $x = 1$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Wir müssen daher in den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ die Steigung bestimmen, d.h. wir müssen aus jedem Intervall einen Punkt wählen (wir wählen 0 bzw. 2) und dort die 1.Ableitung untersuchen:

Erste Ableitung:	Erste Ableitung bei $x = 0$:	Erste Ableitung bei $x = 2$:
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$	$f'(\mathbf{0}) = 3 \cdot \mathbf{0}^2 - 6 \cdot \mathbf{0} + 3 = \underline{\underline{3}}$	$f'(\mathbf{2}) = 3 \cdot \mathbf{2}^2 - 6 \cdot \mathbf{2} + 3 = \underline{\underline{3}}$

In beiden Intervallen ist die Steigung positiv, d.h. der Graph steigt:
Wir können nun die Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	*0*	*positiv*	*steigt*	
1	— — —	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞	*2*	*positiv*	*steigt*	

Jetzt können wir bestimmen, ob an der Stelle x=1 ein Extrema oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle x=1 horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle x=1 steigt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	*0*	*positiv*	*steigt*	
1	— — —	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ ***Sattelpunkt***
1 bis ∞	*2*	*positiv*	*steigt*	

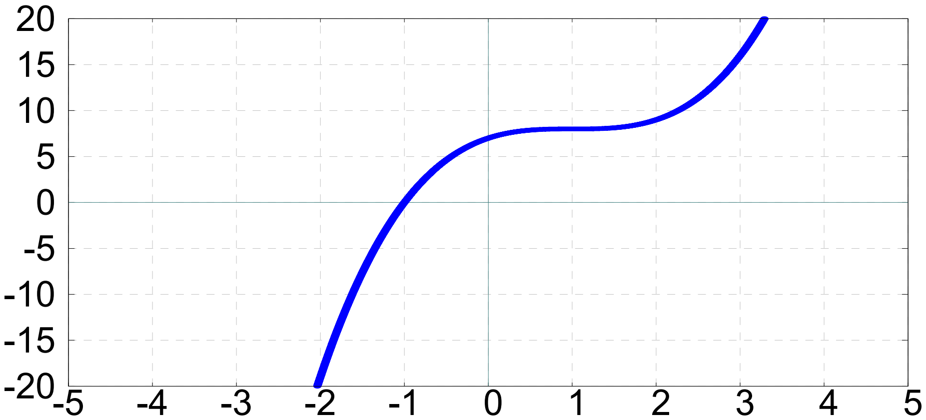
y-Koordinate des Sattelpunktes berechnen:

Die x-Koordinate des Sattelpunktes sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinate berechnen, um den Sattelpunkt zu berechnen.
Dazu setzen wir die x-Koordinate des Sattelpunktes in die gegebene Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ ein, und erhalten die y-Koordinate: $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 7 = \underline{\underline{8}}$

Ergebnis:

Die Funktion hat keine lokalen Extrema aber einen Sattelpunkt S(1 / 8)

Graph der Funktion:



Lösung zu 1c

Gegeben: $f(x)=2x^3-6x^2+6x$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. und 2.Ableitung der gegebenen Funktion:

$$f(x)=2x^3-6x^2+6x$$
$$f'(x)=6x^2-12x+6$$
$$f''(x)=12x-12$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine quadratische Gleichung.
Diese lösen wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$6x^2-12x+6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 6\cdot 6}}{2\cdot 6}=\frac{12}{12}=1$$

Es ergibt sich als mögliche Stellen für ein lokales Extremum oder Sattelpunkt: $x=1$

2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir setzen $x=1$ in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden. Die zweite Ableitung lautete: $\boldsymbol{f''(x)=12x-12}$

$\mathbf{f''(1)=12\cdot 1-12=0}$ $\Rightarrow$ **Weil die 2.Ableitung an der Nullstelle der 1.Ableitung (hier: x = 1) gleich Null ist, versagt der Test, der die 2.Ableitung benutzt. Wir müssen daher eine Tabelle erstellen.**

Unklare Stelle x=1untersuchen:

Für die Stelle x=1 kann (mit Hilfe der 2.Ableitung) keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Terassenpunkt handelt.
Wir müssen daher die 1.Ableitung untersuchen und eine Tabelle anlegen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1				
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞				

Wie gesagt ist es unklar, ob bei $x = 1$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt.
Wir müssen daher in den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ die Steigung bestimmen,
d.h. wir müssen aus jedem Intervall eine Stelle wählen (wir wählen $x = 0$ bzw. $x = 2$)
und dort die 1.Ableitung untersuchen:

Erste Ableitung:	Erste Ableitung bei $x = 0$:	Erste Ableitung bei $x = 2$:
$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$	$f'(\mathbf{0}) = 6 \cdot \mathbf{0}^2 - 12 \cdot \mathbf{0} + 6 = \underline{\underline{6}}$	$f'(\mathbf{2}) = 6 \cdot \mathbf{2}^2 - 12 \cdot \mathbf{2} + 6 = \underline{\underline{6}}$

In beiden Intervallen ist die Steigung positiv, d.h. der Graph steigt.
Wir können nun die Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	0	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞	2	positiv	steigt	

Jetzt können wir bestimmen, ob an der Stelle $x = 1$ ein Extrema oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle $x = 1$ horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle $x = 1$ steigt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 1	0	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ **Sattelpunkt**
1 bis ∞	2	positiv	steigt	

y-Werte der Extrema berechnen:

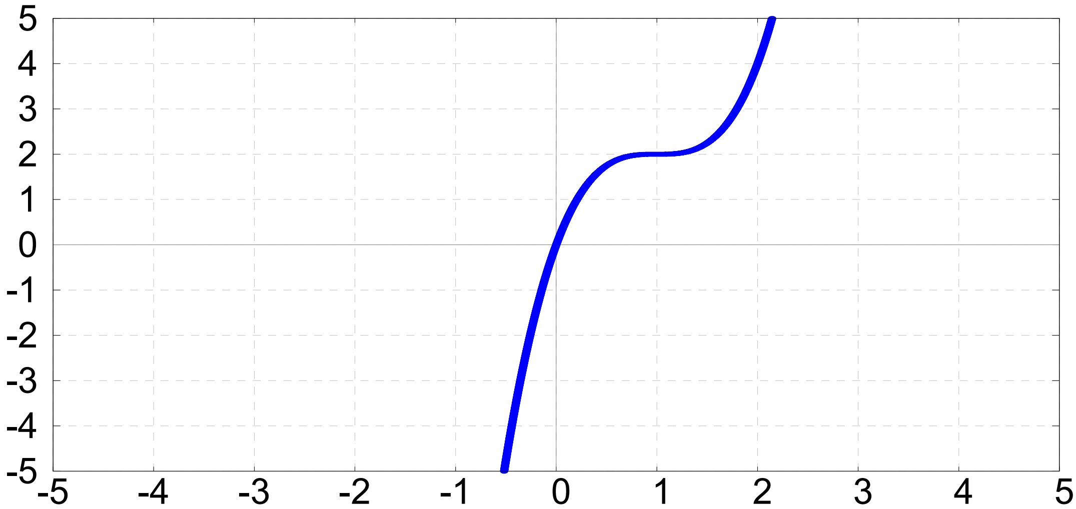
Die x-Koordinaten der Extrema sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte zu berechnen.
Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema in die gegebene Funktion ein, d.h. in die Funktion: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 2$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$ *hat den Sattelpunkt (1 / 2) aber keine Extrama :*

Graph der Funktion:



Lösung zu 1d

Gegeben: $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. und 2.Ableitung der gegebenen Funktion :

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$$
$$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2$$
$$f''(x) = 20x^3 + 60x^2 + 30x$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null. Es entsteht eine Gleichung 4.Grades, die wir durch ausklammern von x^2 auf zwei quadratische Gleichungen zurückführen. Diese lösen wir durch Wurzelziehen bzw. mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen :

$5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 0$ | *x^2 ausklammern*

$x^2\left(5x^2 + 20x + 15\right) = 0$ | $\Rightarrow x_1 = 0$ *jetzt die Klammer mit Null gleichsetzen*

$5x^2 + 20x + 15 = 0$ | *Lösungsformel für quadratische Gleichungen benutzen*

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 5 \cdot 15}}{2 \cdot 5} = \frac{-20 \pm 10}{10}$$

Es ergeben sich drei Stellen als mögliche lokale Extrema bzw. als mögliche Sattelpunkte : 0, –1 und –3

2.Ableitung untersuchen:

Wir setzen die Nullstellen der 1.Ableitung ($x = 0,\ x = -1,\ x = -3$) in die 2.Ableitung ein, um zwischen Minimum, Maximum und Sattelpunkt zu unterscheiden.

Die zweite Ableitung lautet: $\boldsymbol{f''(x) = 20x^3 + 60x^2 + 30x}$

$\mathbf{f''(0) = 20 \cdot 0^3 + 60 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 = 0} \quad \Rightarrow$ **Keine Aussage möglich: x = 0 kann Extremum oder Terassenpunkt sein**

$\mathbf{f''(-1) = 20 \cdot 1^3 + 60 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 = 110 > 0} \quad \Rightarrow$ **x = –1 ist ein Minimum**

$\mathbf{f''(-3) = 20 \cdot (-3)^3 + 60 \cdot (-3)^2 + 30 \cdot (-3) = -90 < 0} \quad \Rightarrow$ **x = –3 ist ein Maximum**

Unklare Stelle x=0 untersuchen:

Für die Stelle x=0 kann mit Hilfe der 2.Ableitung keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt. Wir müssen daher eine Tabelle anlegen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	– – –	positiv	steigt	
–3	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
–3 bis –1	– – –	negativ	fällt	
–1	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
–1 bis 0	– – –	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞	?	?	?	

Wir müssen nun eine Stelle im Intervall $(0,\infty)$ *wählen (wir wählen* $x = 1$*)*
und berechnen die erste Ableitung (und somit die Steigung) an dieser Stelle:

Erste Ableitung: $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 1$*:* $f'(1) = 5 \cdot 1^4 + 20 \cdot 1^3 + 15 \cdot 1^2 = \underline{\underline{40}}$

Wir können nun die letzte Zeile der Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	– – –	positiv	steigt	
–3	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
–3 bis –1	– – –	negativ	fällt	
–1	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
–1 bis 0	– – –	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞	1	positiv	steigt	

Schließlich können wir nun bestimmen, ob an der Stelle x=0 ein Extrema oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle x=0 horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle x=0 steigt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	– – –	positiv	steigt	
–3	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
–3 bis –1	– – –	negativ	fällt	
–1	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
–1 bis 0	– – –	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	⇐ **Sattelpunkt**
0 bis ∞	1	positiv	steigt	

y-Werte der Extrema und des Sattelpunkt berechnen:

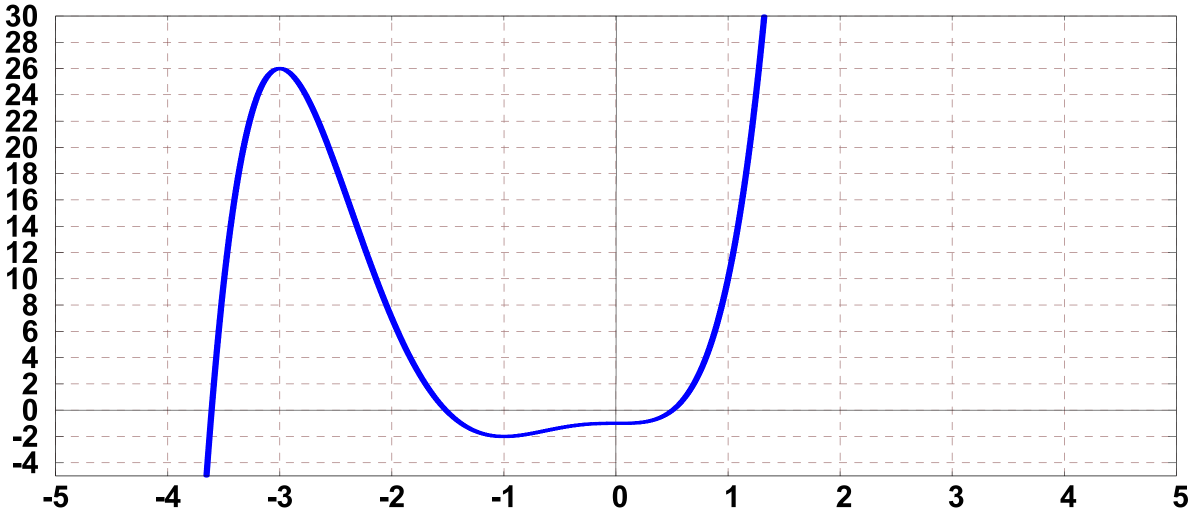
Die x-Koordinaten der Extrema und des Sattelpunktes sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um die Extrempunkte und Sattelpunkt zu berechnen.
Dazu setzen wir die x-Koordinaten der Extrema/Sattelpunkte in die gegebene Funktion $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$ ein:

Sattelpunkt :	$x = 0$	$f(0) = 0^5 + 5\cdot 0^4 + 5\cdot 0^3 - 1 = -1$
Minimum :	$x = -1$	$f(-1) = (-1)^5 + 5\cdot(-1)^4 + 5\cdot(-1)^3 - 1 = -2$
Maximum :	$x = -3$	$f(-3) = (-3)^5 + 5\cdot(-3)^4 + 5\cdot(-3)^3 - 1 = 26$

Ergebnis:

Sattelpunkt : (0/–1)
Lokales Minimum : (–1/–2)
Lokales Maximum : (–3/26)

Graph der Funktion:



Lösung zu 1e

Gegeben: $f(x)=x(4-x)^3$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. Ableitung der gegebenen Funktion :

Die gegebene Funktion lautet :

$$f(x)=x\cdot(4-x)^3$$

Um die Ableitung dieser Funktion zu bilden, benutzen wir die Pr oduktregel $\mathbf{f'(uv)=u\cdot v'+u'\cdot v}$ *und erhalten :*

$$f'(x)=x\cdot\frac{d}{dx}\left[(4-x)^3\right]+\frac{d}{dx}[x]\cdot(4-x)^3$$

Die Ableitung von x ist 1 (Potenzregel : $1x^0=1\cdot1=1$*)*

$$f'(x)=x\cdot\frac{d}{dx}\left[(4-x)^3\right]+1\cdot(4-x)^3$$

Vereinf achen : Die "1" kann fortgelassen werden :

$$f'(x)=x\cdot\frac{d}{dx}\left[(4-x)^3\right]+(4-x)^3$$

Nun müssen wir nur noch die Ableitung von $(4-x)^3$ *bilden.*
Dazu benutzen wir die Kettenregel : $\mathbf{f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$

$$f'(x)=x\cdot3(4-x)^2\cdot(-1)+(4-x)^3$$

Vereinf achen :

$$f'(x)=-3x(4-x)^2+(4-x)^3$$
$$f'(x)=-3x(4-x)^2+(4-x)^3$$

Jetzt müssen wir $(4-x)^2$ *ausklammern :*

$$f'(x)=(4-x)^2(-3x+(4-x))$$
$$f'(x)=(4-x)^2(4-4x)$$

Dies ist 1.Ableitung der gegebenen Funktion.

2.Ableitung berechnen:

Wir müssen nun die *2. Ableitung der gegebenen Funktion :*

Die erste Ableitung lautete :

$$f'(x) = (4-x)^2 \cdot (4-4x)$$

Um die Ableitung dieser Funktion, d.h. die 2.Ableitung, *zu bilden,*

benutzen wir die Produktregel $\boldsymbol{f'(uv) = u \cdot v' + u' \cdot v}$:

$$f''(x) = (4-x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[(4-4x)\right] + \frac{d}{dx}\left[(4-x)^2\right] \cdot (4-4x)$$

Die Ableitung von $(4-4x)$ *ist* -4 *(ergibt sich aus Summen und Potenzregel) :*

$$f''(x) = (4-x)^2 \cdot (-4) + \frac{d}{dx}\left[(4-x)^2\right] \cdot (4-4x)$$

Nun müssen wir nur noch die Ableitung von $(4-x)^2$ *bilden.*
Dazu benutzen wir die Kettenregel : $\boldsymbol{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$

$$f''(x) = -4(4-x)^2 - 2(4-x)(4-4x)$$

Vereinfachen :

$$f''(x) = -4(4-x)^2 - 2(4-x) \cdot (4-4x)$$

Wir klammern $-2(4-x)$ *aus :*

$$f''(x) = -2(4-x)\left[2(4-x) + (4-4x)\right]$$

Vereinfachen :

$$f''(x) = -2(4-x) \cdot [8-2x + 4-4x]$$

$$f''(x) = -2(4-x) \cdot (12-6x)$$

Dies ist 2.Ableitung der gegebenen Funktion.

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Nun müssen wir die Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung lautet :

$$f'(x) = (4-x)^2 (4-4x)$$

Wir setzen die 1.Ableitung gleich Null:

$$(4-x)^2 (4-4x) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung (4 bzw. 1) kann man unmittelbar ablesen, wenn man sich an folgenden Lehrsatz erinnert:
Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Ergebnis :
Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten : 1 und 4.

2.Ableitung untersuchen:

Nun müssen wir berechnen, welchen Wert die 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung hat :

Die 2.Ableitung lautete :

$$f''(x) = -2(4-x)\cdot(12-6x)$$

Wir berechnen nun welchen Wert diese 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung hat, also an den Stellen ***x = 1 und x = 4*** *:*

$$f''(\mathbf{1}) = -2(4-\mathbf{1})\cdot(12-6\cdot\mathbf{1}) = -36 < 0 \qquad \Rightarrow x = 1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$f''(\mathbf{4}) = -2(4-\mathbf{4})\cdot(12-6\cdot\mathbf{4}) = 0 \qquad \Rightarrow \text{Für } x = 4 \text{ ist keine Aussage möglich,}$$
denn bei x = 4 ist die 2.Ableitung gleich Null.

Ergebnis :
Für x = 1 liegt ein Maximum vor, das Verhalten an der Stelle x = 4 ist unklar und muß weiter untersucht werden (Tabelle der 1.Ableitung anlegen)

Unklare Stelle x=4 untersuchen:

Für die Stelle $x = 4$ kann mit Hilfe der 2.Ableitung keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt. Wir müssen daher eine Tabelle anlegen. Wir wissen bereits, dass $x = 1$ ein Maximum ist. Daher kennen wir das Verhalten des Graphen vor und nach der Stelle $x = 1$:

x	Gewählt	1.Ableitung	Graph	
$-\infty$ bis 1	---	positiv	steigt	
1	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis 4	---	negativ	fällt	
4	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
4 bis ∞	?	?	?	

Wir müssen nun eine Stelle im Intervall $(4,\infty)$ wählen (wir wählen $x = 5$) und berechnen die erste Ableitung (und somit die Steigung) an dieser Stelle:

Erste Ableitung: $f'(x) = (4-x)^2 (4-4x)$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 5$: $f'(5) = (4-5)^2 (4-4\cdot 5) = \underline{\underline{-16}}$

Wir können nun die letzte Zeile der Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Graph	
$-\infty$ bis 1	---	positiv	steigt	
1	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis 4	---	negativ	fällt	
4	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
4 bis ∞	5	negativ	fällt	

Jetzt können wir erkennen, ob an der Stelle $x = 4$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle $x = 4$ horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle $x = 4$ fällt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Graph	
$-\infty$ bis 1	---	positiv	steigt	
1	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis 4	---	negativ	fällt	
4	---	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
4 bis ∞	5	negativ	fällt	

y-Werte der Extrema und des Sattelpunkt berechnen:

Die x-Koordinaten des Maximus und des Sattelpunktes sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um den Extrempunkt und den Sattelpunkt zu berechnen. Dazu setzen wir die x-Koordinaten des Extremums/Sattelpunktes in die gegebene Funktion $f(x) = x(4-x)^3$ ein:

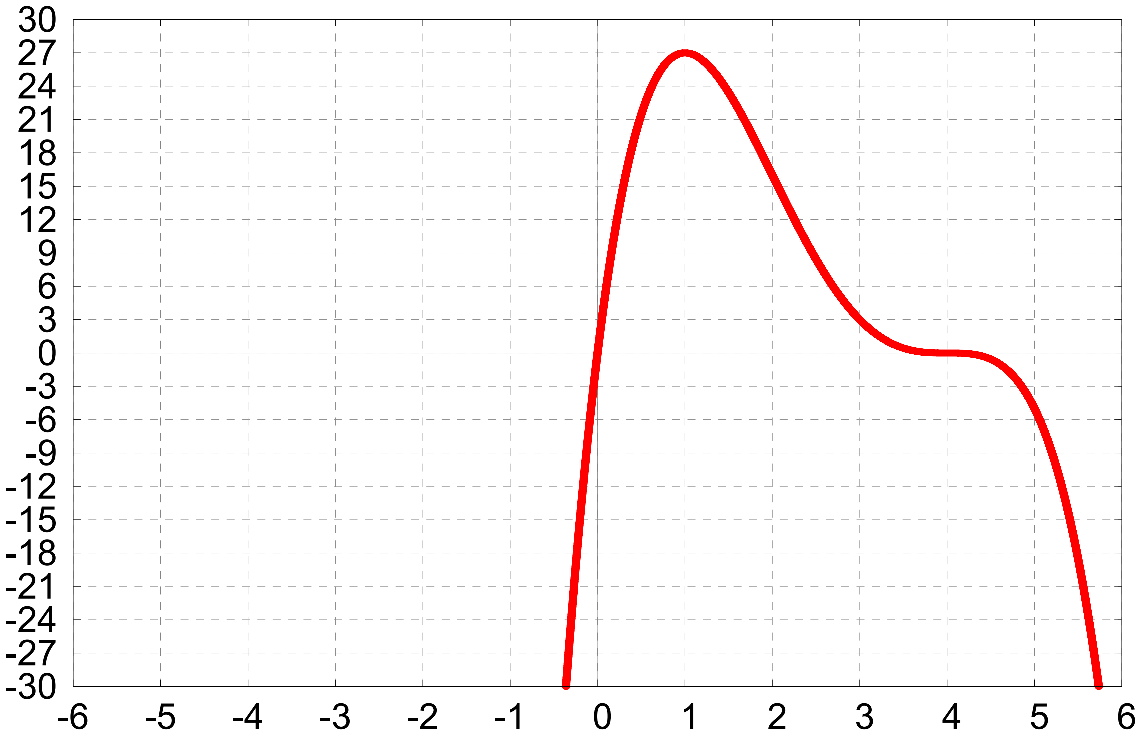
Maximum :	$x = 1$	$f(\mathbf{1}) = x(4-\mathbf{1})^3 = 27$
Sattelpunkt :	$x = 4$	$f(\mathbf{4}) = x(4-\mathbf{4})^3 = 0$

Ergebnis:

Lokales Maximum : (1/27)

Sattelpunkt : (4/0)

Graph der Funktion:



Lösung zu 1f

Gegeben: $f(x)=4(x-1)^3+(x-1)^4$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Wir bilden die 1. Ableitung der gegebenen Funktion :

Die gegebene Funktion lautet :

$$f(x)=4(x-1)^3+(x-1)^4$$

Um die Ableitung dieser Funktion zu bilden, benutzen wir die Summenregel:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[4(x-1)^3\right]+\frac{d}{dx}\left[(x-1)^4\right]$$

Für die Potenzen benutzen wir jeweils die Kettenregel $\boldsymbol{f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$:

$$f'(x)=\left[3\cdot 4(x-1)^2\cdot 1\right]+\left[4(x-1)^3\cdot 1\right]$$

Jetzt klammern wir $(x-1)^2$ *aus :*

$$f'(x)=(x-1)^2\cdot(12+4(x-1))$$

Rechte Klammer vereinfachen, indem wir die innere Klammer ausmultiplizieren :

$$f'(x)=(x-1)^2\cdot(4x+8)$$

Dies ist 1.Ableitung der gegebenen Funktion.

2.Ableitung berechnen:

Wir müssen nun die *2. Ableitung der gegebenen Funktion :*

Die erste Ableitung lautete :

$$f'(x) = (x-1)^2 \cdot (4x+8)$$

Um die Ableitung dieser Funktion, d.h. die 2.Ableitung, *zu bilden,*

benutzen wir die Produktregel $\boldsymbol{f'(uv) = u \cdot v' + u' \cdot v}$:

$$f''(x) = (x-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[(4x+8)\right] + \frac{d}{dx}\left[(x-1)^2\right] \cdot (4x+8)$$

Die Ableitung von $(4x+8)$ *ist* 4 *(ergibt sich aus Summen und Potenzregel) :*

$$f''(x) = (x-1)^2 \cdot 4 + \frac{d}{dx}\left[(x-1)^2\right] \cdot (4x+8)$$

Nun müssen wir nur noch die Ableitung von $(x-1)^2$ *bilden.*
Dazu benutzen wir die Kettenregel : $\boldsymbol{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$

$$f''(x) = (x-1)^2 \cdot 4 + 2(x-1) \cdot (4x+8)$$

Ausklammern von $(x-1)$ *ergibt :*

$$f''(x) = (x-1) \cdot \left[4(x-1) + 2(4x+8)\right]$$

Vereinfachen :

$$f''(x) = (x-1) \cdot (12x+12)$$

$$f''(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot 12$$

3.Binomishe Formel anwenden :

$$f''(x) = (x^2-1) \cdot 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

Dies ist 2.Ableitung der gegebenen Funktion.

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Nun müssen wir die Nullstellen der 1.Ableitung berechnen :

Die 1.Ableitung lautet :

$$f'(x) = (x-1)^2 \cdot (4x+8)$$

Wir setzen die 1.Ableitung gleich Null:

$$(x-1)^2 \cdot (4x+8) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung (1 bzw. –2) kann man unmittelbar ablesen, wenn man sich an folgenden Lehrsatz erinnert:
Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Ergebnis :
Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten : 1 und – 2.

2.Ableitung untersuchen:

Nun müssen wir berechnen, welchen Wert die 2.Ableitung

an den Nullstellen der 1.Ableitung hat :

Die 2.Ableitung lautete :

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

Wir berechnen nun welchen Wert diese 2.Ableitung an den

Nullstellen der 1.Ableitung hat, also an den Stellen **$x = 1$ und $x = -2$** *:*

$f''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 12 = 36 > 0 \quad \Rightarrow x = -2$ *ist ein Minimum*

$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow$ *Für $x = 1$ ist keine Aussage möglich, denn bei $x = 1$ ist die 2.Ableitung gleich Null.*

Ergebnis :
Für $x = -2$ liegt ein Minimum vor, das Verhalten an der Stelle $x = 1$ ist unklar und muß weiter untersucht werden (Tabelle der 1.Ableitung anlegen)

Unklare Stelle x=1 untersuchen:

Für die Stelle $x = 1$ kann mit Hilfe der 2.Ableitung keine Aussage darüber gemacht werden, ob es sich um ein Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt. Wir müssen daher eine Tabelle anlegen. Wir wissen bereits, dass $x = -2$ ein Minimum ist. Daher kennen wir das Verhalten des Graphen vor und nach der Stelle $x = -2$:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	– – –	negativ	fällt	
-2	– – –	Null	horizontal	⇐ *Minimum*
-2 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ *Zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞	?	?	?	

Wir müssen nun eine Stelle im Intervall $(1,\infty)$ wählen. Wir wählen $x = 2$. Dann berechnen wir die erste Ableitung (die Steigung) an dieser Stelle:

Erste Ableitung: $f'(x) = (x-1)^2 \cdot (4x+8)$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 5$: $f'(2) = (2-1)^2 \cdot (4 \cdot 2 + 8) = \underline{\underline{16}}$

Wir können nun die letzte Zeile der Tabelle ergänzen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	– – –	negativ	fällt	
-2	– – –	Null	horizontal	⇐ *Minimum*
-2 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ *Zu untersuchende Stelle*
1 bis ∞	2	positiv	steigt	

Jetzt können wir erkennen, ob an der Stelle $x = 1$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Da der Graph an der Stelle $x = 1$ horizontal verläuft, und sowohl vor als auch nach der Stelle $x = 1$ steigt, kann es sich nur um einen Sattelpunkt handeln:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	– – –	negativ	fällt	
-2	– – –	Null	horizontal	⇐ *Minimum*
-2 bis 1	– – –	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ **Sattelpunkt**
1 bis ∞	2	positiv	steigt	

y-Werte der Extrema und des Sattelpunkt berechnen:

Die x-Koordinaten des Minimums und des Sattelpunktes sind nun schon bekannt, aber wir müssen noch die y-Koordinaten berechnen, um den Extrempunkt und *den* Sattelpunkt zu ermitteln.
Dazu setzen wir die x-Koordinaten des Extremums bzw. des Sattelpunktes in die gegebene Funktion $f(x) = 4(x-1)^3 + (x-1)^4$ ein:

Minimum :	$x = -2$	$f(\mathbf{-2}) = 4(\mathbf{-2}-1)^3 + (\mathbf{-2}-1)^4 = -27$
Sattelpunkt :	$x = 1$	$f(\mathbf{1}) = 4(\mathbf{1}-1)^3 + (\mathbf{1}-1)^4 = 0$

Ergebnis:

Lokales Minimum : (–2/–27)
Sattelpunkt : (1/0)

Graph der Funktion: