Übungen zum Thema:

Extrema gebrochen–rationaler Funktionen

Hier angewandte Lösungsmethode:

Kombination aus Grenzwertmethode und Untersuchung der 2.Ableitung

Versionsnummer:

Version in Arbeit vom 5.09.2007 / 15.00 Uhr

Stand der Bearbeitung:

Welche Aufgaben sind schon fertig: 1a bis 1b

Hinweise nur für Mitarbeiter:

> Umstellen auf neue Differentialschreibweise ohne dx

Finde <u>lokale Extrema</u> der gebrochen rationalen Funktionen.

Versuche die Aufgaben zunächst mit der „Methode der 2.Ableitung“.
Du wirst feststellen, dass bei jeder Aufgabe mindestens eine Stelle vorliegt, bei der die “Methode der 2.Ableitung“ versagt (2.Ableitung gleich Null).
Berechne diese problematischen Stellen mit der Grenzwertmethode.

Da sich Sattelstellen automatisch ergeben, ermittel auch die Sattelpunkte.

1a)	$f(x)=\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt
1b)	$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt
1c)	$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt

Lösung zu 1a

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\left(x^3-9x^2+27x-27\right)'\cdot(x-1)-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}$$

Um $\left(x^3-9x^2+27x-27\right)$ *bzw.* $(x-1)$ *zu differenzieren, benutzen wir jeweils die Summen – und die Potenzregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-18x+27\right)\cdot(x-1)-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

Das Ausmultiplizieren der beiden ersten Klammern ergibt :

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x^2-18x^2+18x+27x-27-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)}{(x-1)^2}$$

Klammer im Zähler auflösen : Wegen dem Minus vor der Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x^2-18x^2+18x+27x-27-x^3+9x^2-27x+27}{(x-1)^2}$$

Im Zähler gleiche Potenzen zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3-12x^2+18x}{(x-1)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{(x-1)^2} = 0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 0$$

Wir klammern x aus und erhalten:

$$x\left(2x^2 - 12x + 18\right) = 0$$

Wir erhalten die erste Lösung $x = 0$, wenn wir uns an den Satz erinnern:
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.
Die übrigen Lösungen ergeben sich, wenn man die Klammer mit Null gleichsetzt:

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x = 0}$ *und* $\boxed{x = 3}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben:

$$f'(x)=\frac{2x^3-12x^2+18x}{(x-1)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel:

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}\qquad z(x)=\text{Zählerpolynom},\;\; n(x)=\text{Nennerpolynom}$$

Es ergibt sich als 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{\left(2x^3-12x^2+18x\right)'\cdot(x-1)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

In der Formel sind noch zwei Differentiale zu finden, die wir berechnen müssen.

Zunächst berechnen wir das Differential $\left(2x^3-12x^2+18x\right)'$.

Mit Hilfe der Summen- und Potenzregel erhalten wir das Ergebnis:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot(x-1)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

Jetzt ist in der Formel nur noch ein Differential vorhanden.

Zur Berechnung des Differentials benötigen wir die Kettenregel: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $(x-1)^2$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion.*

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot(x-1)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2(x-1)\cdot(x-1)'}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

Jetzt ist zwar immer noch ein Differential vorhanden, doch dieses läßt sich leicht berechnen, indem wir Summen- und Potenzregel anwenden: $(x-1)'=1$

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot(x-1)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz wir potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot(x-1)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter:

Fortsetzung

Auf der letzten Seite sind wir bis zu folgender Formel gekommen:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot\left(x-1\right)^2-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4}$$

Im Zähler können wir $\left(x-1\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x)=\frac{\left(x-1\right)\cdot\left[\left(6x^2-24x+18\right)\cdot\left(x-1\right)-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2\right]}{\left(x-1\right)^4}$$

Nun können wir den Bruch mit $\left(x-1\right)$ *kürzen:*

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-24x+18\right)\cdot\left(x-1\right)-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2}{\left(x-1\right)^3}$$

Ausmultiplizieren der beiden ersten Klammern im Zähler ergibt:

$$f''(x)=\frac{6x^3-6x^2-24x^2+24x+18x-18-\left(2x^3-12x^2+18x\right)\cdot 2}{\left(x-1\right)^3}$$

Im Zähler multiplizieren wir die letzte Klammer mit dem Faktor 2,

der hinter der Klammer steht:

$$f''(x)=\frac{6x^3-6x^2-24x^2+24x+18x-18-\left(4x^3-24x^2+36x\right)}{\left(x-1\right)^3}$$

Wegen dem Minuszeichen vor der Klammer, kehren sich alle Vorzeichen um:

$$f''(x)=\frac{6x^3-6x^2-24x^2+24x+18x-18-4x^3+24x^2-36x}{\left(x-1\right)^3}$$

Wir fassen gleiche Terme zusammen, und erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{2x^3-6x^2+6x-18}{\left(x-1\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$\boxed{f''(x)=\frac{2x^3-6x^2+6x-18}{(x-1)^3}}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung. Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen alle x in der 2.Ableitung durch 0 bzw. 3, und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$\boxed{f''(0)=\frac{2\cdot 0^3-6\cdot 0^2+6\cdot 0-18}{(0-1)^3}=\frac{-18}{-1}=18}$$

$$\boxed{f''(3)=\frac{2\cdot 3^3-6\cdot 3^2+6\cdot 3-18}{(3-1)^3}=\frac{0}{8}=0}$$

Auswertung :

Die Stelle x=0 ist "Nullstelle der 1.Ableitung"
und die 2.Ableitung hat dort einen positiven Wert.
Daher liegt an der Stelle x=0 ein Minimum vor.

An der Stelle x=3 hat die 2.Ableitung den Funktionswert Null.
Dies bedeutet, dass die Methode der 2.Ableitung hier versagt, und wir nicht wissen, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.
Wir müssen diese Stelle mit einer anderen Methode näher untersuchen und benutzen dazu die Grenzwertmethode (siehe nächste Seite) .

Grenzwertmethode anwenden

Für die Stelle x=3 hatte die "Methode der 2.Ableitung" kein Ergebnis gebracht.
Wir wenden daher für x=3 die Grenzwertmethode an.
Dazu setzen wir 3–Δx bzw. 3+Δx in die 1.Ableitung ein, und vereinfachen die enstehenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln:

$$f'(3-\Delta x) = \frac{2(3-\Delta x)^3 - 12(3-\Delta x)^2 + 18(3-\Delta x)}{((3-\Delta x)-1)^2}$$

$$= \frac{6(\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^3}{(2-\Delta x)^2}$$

$$= \frac{(\Delta x)^2 \cdot [6 - 2(\Delta x)]}{(2-\Delta x)^2}$$

$$= \frac{0^+ \cdot [\approx 6]}{[\approx 4]} = positiv$$

$$f'(3+\Delta x) = \frac{2(3+\Delta x)^3 - 12(3+\Delta x)^2 + 18(3+\Delta x)}{((3+\Delta x)-1)^2}$$

$$= \frac{6(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{(2+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{(\Delta x)^2 \cdot [6 + 2(\Delta x)]}{(2+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{0^+ \cdot [\approx 6]}{[\approx 4]} = positiv$$

Auswertung :
Sowohl vor als auch nach der Stelle x=3 steigt die Funktion,
daher muß die Funktion f(x) an der Stelle x=3 einen Sattelpunkt haben.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet :

$x = 0$ *ein Minimum*

$x = 3$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 1}$

$$f(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{0}^3 - 9 \cdot \mathbf{0}^2 + 27 \cdot \mathbf{0} - 27}{\mathbf{0} - 1} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(\mathbf{3}) = \frac{\mathbf{3}^3 - 9 \cdot \mathbf{3}^2 + 27 \cdot \mathbf{3} - 27}{\mathbf{3} - 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(0/27)$ *ist ein Minimum*

$(3/0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph:

Lösung zu 1b

Gegeben: $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\left(x^3-3x^2+3x-1\right)'\cdot(x+1)-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Um $\left(x^3-3x^2+3x-1\right)$ bzw. $(x+1)$ zu differenzieren, benutzen wir jeweils die Summen – und die Potenzregel, und erhalten :

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-6x+3\right)\cdot(x+1)-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

Die beiden ersten Klammern ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+3x^2-6x^2-6x+3x+3-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)}{(x+1)^2}$$

Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+3x^2-6x^2-6x+3x+3-x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}=0$$

*Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:*

$$2x^3-6x+4=0$$

Wir teilen die Gleichung durch 2, wodurch kleinere Koeffizienten entstehen,

$$x^3-3x+2=0$$

*Da man in der Schulmathematik die Lösungsformel für Gleichungen 3.Grades nicht lernt, müssen wir eine andere Methode versuchen, um diese Gleichung 3.Grades zu lösen.
Wir erinnern uns an einen Satz aus der Algebra:* ***"Falls eine ganzrationale Funktion ganzzahlige Lösungen hat, dann sind sie unter den Teilern des Absolutgliedes zu finden"****. Wir lösen die Gleichung also durch Probieren, indem wir die "Teiler des Absolutgliedes" (1,2,−1 und −2) der Reihe nach in die Gleichung einsetzen:*

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-2 \text{ und } x=1}$ *Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Da eine Gleichung 3.Grades aber aber drei Lösungen haben kann, müssen wir nach weiteren möglichen Lösungen suchen. Weil $x=1$ und $x=-2$ Lösungen sind, können wir $(x-1)\cdot(x+2)=\left(x^2+x-2\right)$ aus der Gleichung 3.Grades abspalten. Dazu teilen wir die Gleichung 3.Grades durch $\left(x^2+x-2\right)$:

$$\left(x^3-3x+2\right):\overbrace{\left(x^2+x-2\right)}^{(x-1)\cdot(x+2)}=(x-1)$$

Die Gleichung 3.Grades kann man also schreiben als:

$$(x-1)(x-1)(x+2)=0$$

*Nun können wir die Lösungen $x=1$ und $x=-2$ ablesen, indem wir den Lehrsatz benutzen:
Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.*

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-2}$ *und* $\boxed{x=1}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben:

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel:

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}\qquad z(x)=\text{Zählerpolynom},\;\; n(x)=\text{Nennerpolynom}$$

Es ergibt sich als 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{\left(2x^3-6x+4\right)'\cdot(x+1)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

In der Formel sind noch zwei Differentiale zu finden, die wir berechnen müssen.

Zunächst berechnen wir das Differential $\left(2x^3-6x+4\right)'$.

Mit Hilfe der Summen- und Potenzregel erhalten wir das Ergebnis:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot(x+1)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot\left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

Jetzt ist in der Formel nur noch ein Differential vorhanden.

Zur Berechnung des Differentials benötigen wir die Kettenregel: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $(x+1)^2$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion.*

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot(x+1)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2(x+1)\cdot(x+1)'}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

Jetzt ist zwar immer noch ein Differential vorhanden, doch dieses läßt sich

leicht berechnen, indem wir Summen- und Potenzregel anwenden: $(x+1)'=1$

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot(x+1)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz

wir potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot(x+1)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter:

Fortsetzung

Auf der letzten Seite sind wir bis zu folgender Formel gekommen:

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot\left(x+1\right)^2-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}$$

Im Zähler können wir $\left(x+1\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x)=\frac{\left(x+1\right)\bullet\left[\left(6x^2-6\right)\cdot\left(x+1\right)-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2\right]}{\left(x+1\right)^4}$$

Nun können wir den Bruch mit $\left(x+1\right)$ *kürzen:*

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\cdot\left(x+1\right)-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2}{\left(x+1\right)^3}$$

Ausmultiplizieren der beiden ersten Klammern im Zähler ergibt:

$$f''(x)=\frac{6x^3+6x^2-6x-6-\left(2x^3-6x+4\right)\cdot 2}{\left(x+1\right)^3}$$

Im Zähler multiplizieren wir die letzte Klammer mit dem Faktor 2,
der hinter der Klammer steht:

$$f''(x)=\frac{6x^3+6x^2-6x-6-\left(4x^3-12x+8\right)}{\left(x+1\right)^3}$$

Wegen dem Minuszeichen vor der Klammer, kehren sich alle Vorzeichen um:

$$f''(x)=\frac{6x^3+6x^2-6x-6-4x^3+12x-8}{\left(x+1\right)^3}$$

Wir fassen gleiche Terme zusammen, und erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x^2+6x-14}{\left(x+1\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x^2+6x-14}{(x+1)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung. Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen alle x in der 2.Ableitung durch –2 bzw. 1, und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-2)^3+6\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-14}{((-2)+1)^3}=\frac{-18}{-1}=18$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot 1^3+6\cdot 1^2+6\cdot 1-14}{(1+1)^3}=\frac{0}{8}=0$$

Die Stelle x=–2 ist "Nullstelle der 1.Ableitung"
und die 2.Ableitung hat dort einen positiven Wert.
Daher liegt an der Stelle x=–2 ein Minimum vor.

An der Stelle x=1 hat die 2.Ableitung den Funktionswert Null.
Dies bedeutet, dass die Methode der 2.Ableitung hier versagt, und wir nicht wissen, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.
Wir müssen diese Stelle mit einer anderen Methode näher untersuchen und benutzen dazu die Grenzwertmethode (siehe nächste Seite) .

Grenzwertmethode anwenden

Für die Stelle x=1 hatte die "Methode der 2.Ableitung" kein Ergebnis gebracht.
Wir wenden daher für x=1 die Grenzwertmethode an.
Dazu setzen wir 1+Δx bzw. 1–Δx in die 1.Ableitung ein, und vereinfachen
die enstehenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln:

$$
\begin{aligned}
f'(1+\Delta x) &= \frac{2(1+\Delta x)^3 - 6(1+\Delta x) + 4}{((1+\Delta x)+1)^2} \\
&= \frac{6(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{(2+\Delta x)^2} \\
&= \frac{0^+ \cdot 0^+}{[\approx 4]} = positiv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(1-\Delta x) &= \frac{2(1-\Delta x)^3 - 6(1-\Delta x) + 4}{((1-\Delta x)+1)^2} \\
&= \frac{6(\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^3}{(2-\Delta x)^2} \\
&= \frac{(\Delta x)^2 \cdot [6 - 2(\Delta x)]}{(2-\Delta x)^2} \\
&= \frac{0^+ \cdot [\approx 6]}{[\approx 4]} = positiv
\end{aligned}
$$

Auswertung :
Sowohl vor als auch nach der Stelle x=1 steigt die Funktion (1.Ableitung positiv),
daher muß die Funktion f(x) an der Stelle x=1 einen Sattelpunkt haben.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet :

$x = -2$ *ein Minimum*

$x = 1$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x + 1}$

$$f(\mathbf{-2}) = \frac{(\mathbf{-2})^3 - 3\cdot(\mathbf{-2})^2 + 3\cdot(\mathbf{-2}) - 1}{(\mathbf{-2}) + 1} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}^3 - 3\cdot\mathbf{1}^2 + 3\cdot\mathbf{1} - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

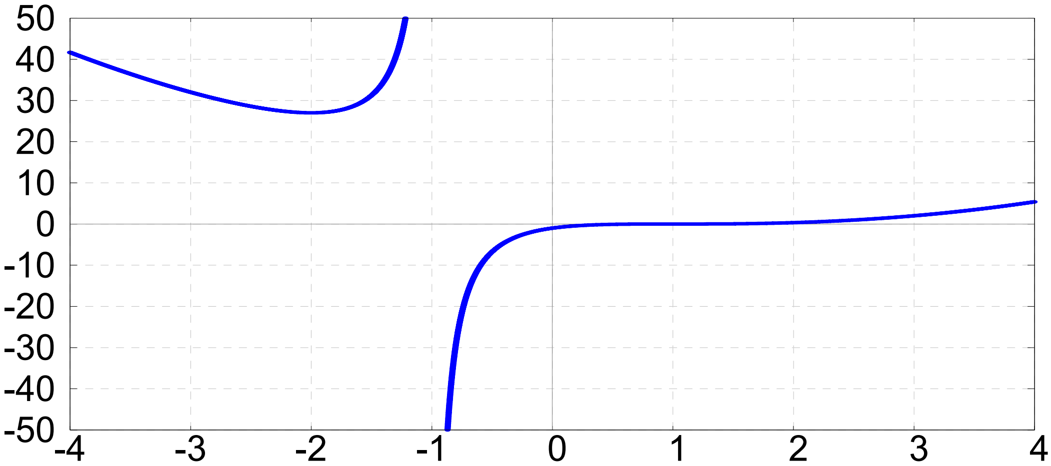
Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(-2 \;/\; 27)$ *ist ein Minimum*

$(1 \;/\; 0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph:



Lösung zu 1c

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\cdot(x+2)-\left(x^3\right)\cdot\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2}$$

Um $(x+2)$ zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+2)-\left(x^3\right)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

Die Klammer ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$2x^3+6x^2=0$$

Wir können x^2 ausklammern:

$$x^2(2x+6)=0$$

Nun benutzen wir den Satz: "Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist". Die erste Lösung können wir nun ablesen:
Sie lautet $x=0$. Eine weitere Lösung findet man, wenn man die Klammer mit Null gleichsetzt:

$$2x+6=0$$

Wir subtrahieren 6 auf beiden Seiten:

$$2x=-6$$

Wir teilen die Gleichung durch 2:

$$x=\frac{-6}{2}=-3$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=0}$ *und* $\boxed{x=-3}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x + 2 = 0$$

Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$$x = -2$$

Dies ist ein möglicher Pol.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattelpunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-3$ *und* $x=0$.
Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir den möglichen Pol ein:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3				
-3	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ zu untersuchende Stelle
-3 bis -2				
-2	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
-2 bis 0				
0	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-3$ *bzw.* $x=0$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen. Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen* $x=-4$, $x=-2.5$, $x=-1$ *und* $x=1$:

Erste Ableitung:
$$\boxed{f'(x)=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-4$:
$$f'(\mathbf{-4})=\frac{2\cdot(\mathbf{-4})^3+6\cdot(\mathbf{-4})^2}{(\mathbf{-4}+2)^2}=\frac{-32}{4}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-2.5$:
$$f'(\mathbf{-2.5})=\frac{2\cdot(\mathbf{-2.5})^3+6\cdot(\mathbf{-2.5})^2}{(\mathbf{-2.5}+2)^2}=\frac{6.25}{0.25}=24>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$:
$$f'(\mathbf{-1})=\frac{2\cdot(\mathbf{-1})^3+6\cdot(\mathbf{-1})^2}{(\mathbf{-1}+2)^2}=\frac{4}{1}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=1$:
$$f'(\mathbf{1})=\frac{2\cdot\mathbf{1}^3+6\cdot\mathbf{1}^2}{(\mathbf{1}+2)^2}=\frac{8}{9}>0$$

Anmerkung für Profis:
Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen!
Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählte Stelle	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	-3	*negativ*	*fällt*	
-3	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ Minimum
-3 bis -2	-2.5	*positiv*	*steigt*	
-2	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
-2 bis 0	-1	*positiv*	*steigt*	
0	– – –	*Null*	*horizontal*	⇐ Sattelpunkt
0 bis ∞	1	*positiv*	*steigt*	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=-3$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-3 \text{ ein Minimum}}$.
2. *Weil die Funktion* sowohl *vor der Stelle* $x=0$ als auch nach dieser Stelle *steigt*, *hat sie bei* $\boxed{x=0 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet :

$x = -3$ *ein Minimum*

$x = 0$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{-3+2} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(0) = \frac{0^3}{0+2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(-3/27)$ *ist ein Minimum*

$(0/0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph: