Übungen zum Thema:

Extrema gebrochen–rationaler Funktionen

Hier angewandte Lösungsmethode:

Untersuchung der 2.Ableitung

Versionsnummer:

Testversion vom 5.09.2007 / 18.30 Uhr

Finde <u>lokale Extrema</u> der folgenden gebrochen rationalen Funktionen.
Berechne diese Punkte mit Hilfe der Methode: Untersuchung der 2.Ableitung.

1a)	$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$	1 Extremum
1b)	$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$	2 Extrema
1c)	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$	2 Extrema
1d)	$f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$	2 Extrema
1e)	$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$	2 Extrema
1f)	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+12x+16}$	2 Extrema

Lösung zu 1a

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

Die 1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-x+1\right)'\cdot\left(-x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(-x^2+x+1\right)'}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Um $\left(x^2-x+1\right)$ *bzw.* $\left(-x^2+x+1\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot\left(-x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\cdot(-2x+1)}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Die Klammern im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2x^2+2x+x^2-x-1-\left[-2x^3+x^2+2x^2-x-2x+1\right]}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Eckige Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der eckigen Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2x^2+2x+x^2-x-1+2x^3-x^2-2x^2+x+2x-1}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen ergibt die gewünschte 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{4x-2}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{4x-2}{\left(-x^2+x+1\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$4x-2=0$$

Wir lösen die Gleichung durch Umstellen der Formel nach x.
Zuerst addieren wir 2 auf beiden Seiten:

$$4x=2$$

Jetzt teilen wir die Gleichung durch 4:

$$x = \frac{2}{4}$$

Jetzt müssen wir das Ergebnis nur noch kürzen:

$$x = \frac{1}{2}$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ *die einzige Nullstelle der 1.Ableitung ist.*

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben:

$$f'(x)=\frac{4x-2}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel:

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n'(x)}{\left[n(x)\right]^2}$$ $z(x)=$ *Zählerpolynom*, $n(x)=$ *Nennerpolynom*

Es ergibt sich als 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{(4x-2)'\cdot\left(-x^2+x+1\right)^2-(4x-2)\cdot\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]'}{\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]^2}$$

Zunächst berechnen wir $(4x-2)'$, *d.h. wir bilden die Ableitung von* $(4x-2)$.
Mit Hilfe der Summen- und Potenzregel erhalten wir als Ergebnis 4:

$$f''(x)=\frac{4\cdot\left(-x^2+x+1\right)^2-(4x-2)\cdot\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]'}{\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]^2}$$

Jetzt ist in der Formel nur noch ein Differential vorhanden, dass wir rot markieren:

$$f''(x)=\frac{4\cdot\left(-x^2+x+1\right)^2-(4x-2)\cdot\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]'}{\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]^2}$$

Zur Berechnung des Differentials benötigen wir die Kettenregel: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $\left(-x^2+x+1\right)$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion.*

$$f''(x)=\frac{4\cdot\left(-x^2+x+1\right)^2-(4x-2)\cdot 2\left(-x^2+x+1\right)\cdot(-2x+1)}{\left[\left(-x^2+x+1\right)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz
wir potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{4\cdot\left(-x^2+x+1\right)^2-(4x-2)\cdot 2\left(-x^2+x+1\right)\cdot(-2x+1)}{\left(-x^2+x+1\right)^4}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter:

Fortsetzung

Auf der letzten Seite sind wir bis zu folgender Formel gekommen:

$$f''(x)=\frac{4\left(-x^2+x+1\right)^2-\ (4x-2)\cdot 2\left(-x^2+x+1\right)\cdot\left(-2x+1\right)}{\left(-x^2+x+1\right)^4}$$

Im Zähler können wir $\left(-x^2+x+1\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x)=\frac{\left(-x^2+x+1\right)\left[4\left(-x^2+x+1\right)-(4x-2)\cdot 2(-2x+1)\right]}{\left(-x^2+x+1\right)^4}$$

Nun können wir den Bruch mit $\left(-x^2+x+1\right)$ *kürzen:*

$$f''(x)=\frac{4\left(-x^2+x+1\right)-(4x-2)\cdot 2(-2x+1)}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Nun fangen wir an, <u>den Zähler zu vereinfachen</u>, und beginnen mit der ersten Klammer. Dort multiplizieren wir die Klammer mit der davorstehenden "4":

$$f''(x)=\frac{-4x^2+4x+4-(4x-2)\cdot 2(-2x+1)}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Nun multiplizieren wir die letzte Klammer mit der 2:

$$f''(x)=\frac{-4x^2+4x+4-(4x-2)\cdot(-4x+2)}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Die beiden Klammern können wir ausmultiplizieren:

$$f''(x)=\frac{-4x^2+4x+4-\left(-16x^2+8x+8x-4\right)}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x)=\frac{-4x^2+4x+4+16x^2-8x-8x+4}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Wir fassen gleiche Terme zusammen, und erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$\boxed{f''(x)=\frac{12x^2-12x+8}{\left(-x^2+x+1\right)^3}}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x)=\frac{12x^2-12x+8}{\left(-x^2+x+1\right)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung.
Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen alle x in der 2.Ableitung durch $\frac{1}{2}$*,*
und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{12\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-12\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)+8}{\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)+1\right)^3}$$

Wir vereinfachen:

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{12\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)-12\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)+8}{\left(-\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)+1\right)^3}=\frac{3-6+8}{\left(\tfrac{5}{4}\right)^3}=\frac{5}{\left(\tfrac{5}{4}\right)^3}$$

Eigentlich können wir die Rechnung hier abbrechen, denn man sieht bereits,
dass der Bruch positiv wird. Trotzdem geben wir noch das Endergebnis an:

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{64}{25}=2.56$$

Wenn die 2.Ableitung an der Nullstelle der 1.Ableitung positiv ist,
dann liegt dort ein Minimum vor.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :

$x = \frac{1}{2}$ *ist ein Minimum*

Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}}{-\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{3}{5}} = \boxed{0.6}$$

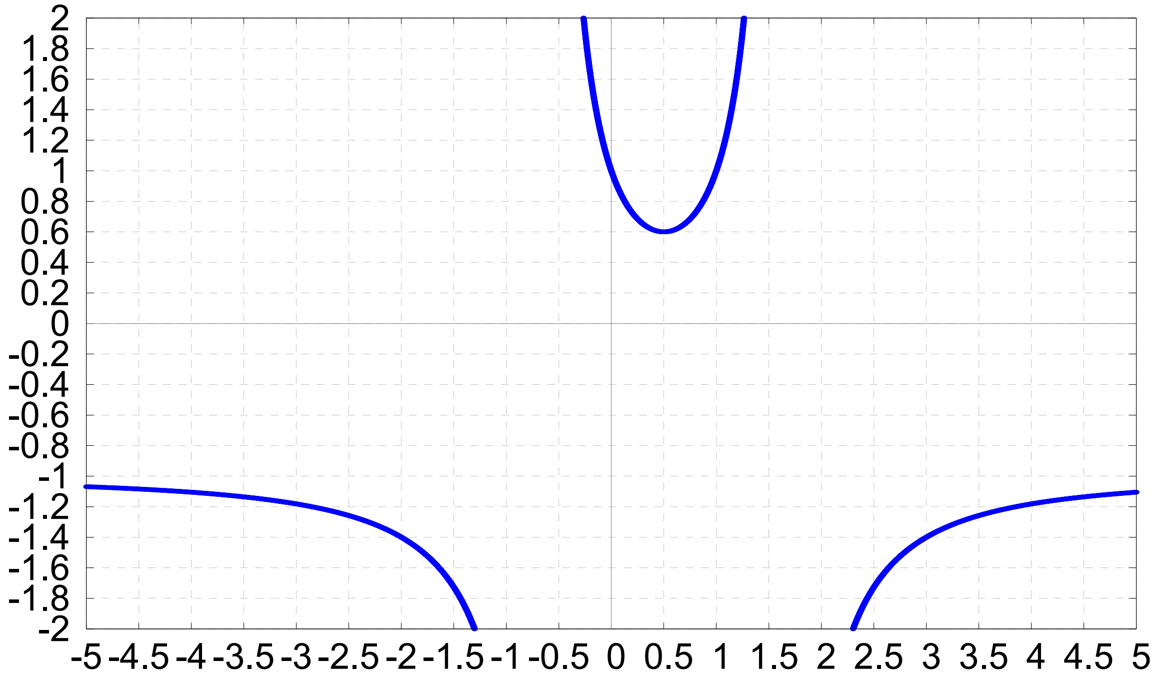
Ergebnis:

Das einzige Extremum der Funktion hat somit folgende Koordinaten :

$\left(\frac{1}{2} \;/\; \frac{3}{5}\right)$ *ist ein Minimum*

Oder in Dezimalschreibweise : $(0.5 \;/\; 0.6)$

Graph:



Lösung zu 1b

Gegeben:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Gesucht:

Lokale Extrema

Die 1.Ableitung berechnen:

Zuerst müssen wir die 1.Ableitung bilden :

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Wir differenzieren die Funktion mit Hilfe der Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x)'\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

Um $(x)'$ zu berechnen benutzen wir die Potenzregel und erhalten als Ergebnis 1.

Um $(1+x^2)'$ zu berechnen, müssen wir die Summenregel anwenden, d.h. wir müssen jeden Summanden einzeln differenzieren.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

Zähler vereinfachen

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Zähler vereinfachen

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$1-x^2=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir durch Umstellen:

$$1=x^2$$
$$x=\pm 1$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: ***x = 1*** *und* ***x = –1***.

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben :

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)' = \frac{z'(x)\cdot n(x) \; - \; z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2} \qquad z(x) = \text{Zählerpolynom}, \;\; n(x) = \text{Nennerpolynom}$$

Es ergibt sich als 2.Ableitung :

$$f''(x) = \frac{\left(1-x^2\right)'\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot\left[\left(1+x^2\right)^2\right]'}{\left[\left(1+x^2\right)^2\right]^2}$$

In der Formel kommen noch zwei Differentiale vor, die wir noch berechnen müssen.

Zuerst berechnen wir $\left(1-x^2\right)'$ *, indem wir die Summen- und Potenzregel anwenden:*

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot\left[\left(1+x^2\right)^2\right]'}{\left[\left(1+x^2\right)^2\right]^2}$$

Das andere Differential steht am Ende des Zählers. Um es zu berechnen, müssen wir die Kettenregel anwenden. Sie lautet: $\left[g\left(f(x)\right)\right]' = g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $\left(1+x^2\right)$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion :*

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)'}{\left[\left(1+x^2\right)^2\right]^2}$$

Durch Anwendung der Kettenregel haben wir das komplizierte Differential in ein einfaches Differential umgewandelt, welches wir mit Summen- und Potenzregel lösen:

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left[\left(1+x^2\right)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz wir potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

weiter auf der nächsten Seite

Fortsetzung

Die letzte Formel auf der vorigen Seite lautete:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right) \cdot 2\left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Wir können im Zähler den Term $\left(1+x^2\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x) = \frac{\left(1+x^2\right) \bullet \left[-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2 \cdot 2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Dadurch können wir den Bruch mit $\left(1+x^2\right)$ *kürzen:*

$$f''(x) = \frac{\cancel{\left(1+x^2\right)} \bullet \left[-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2 \cdot 2x\right]}{\cancel{\left(1+x^2\right)} \left(1+x^2\right)^3}$$

Es ergibt sich:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 4x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Im Zähler können wir beide Klammern mit dem davorstehenden Faktor multiplizieren:

$$f''(x) = \frac{-2x - 2x^3 - \left(4x - 4x^3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Im Zähler werden nun gleiche Potenzen zusammengefaßt.
Wir erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung. Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen alle x in der 2.Ableitung durch 1 bzw. –1, und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''(1) = \frac{2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1}{\left(1 + 1^2\right)^3} = \frac{2 - 6}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$f''(-1) = \frac{2(-1)^3 - 6(-1)}{\left(1 + (-1)^2\right)^3} = \frac{-2 + 6}{8} = \frac{1}{2}$$

Auswertung des Ergebnisses:
An der Stelle x=1 hat die 2.Ableitung einen negativen Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein Maximum.

An der Stelle x=–1 hat die 2.Ableitung einen positiven Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein Minimum.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x-Koordinaten der Extrema berechnet:

x = –1 für das Minimum
x = 1 für das Maximum

Um die y-Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x-Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

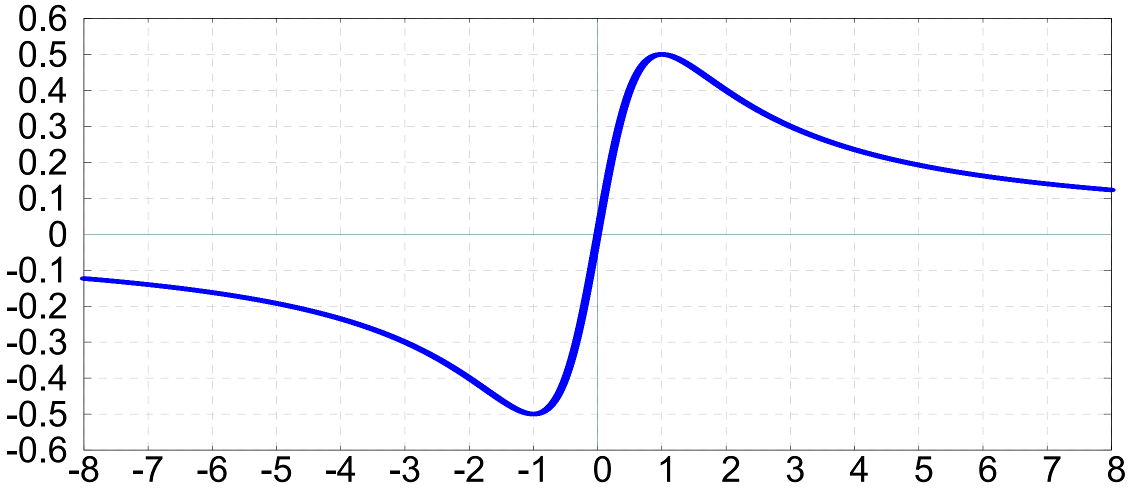
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten:

$\left(-1 / -\frac{1}{2}\right)$ **ist ein Minimum**

$\left(1 / \frac{1}{2}\right)$ **ist ein Maximum**

Graph:



Lösung zu 1c

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+4}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left[\frac{z(x)}{n(x)}\right]'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{(x)'\cdot\left(x^2+2x+4\right)-x\cdot\left(x^2+2x+4\right)'}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Die Formel enthält noch 2 Differentiale (blau), die wir lösen müssen.

Die Ableitung von x ist 1 :

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+2x+4\right)-x\cdot\left(x^2+2x+4\right)'}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Um $2x+2$ zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :

$$f'(x)=\frac{x^2+2x+4-x\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Die Klammer im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{x^2+2x+4-\left[2x^2+2x\right]}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=\frac{x^2+2x+4-2x^2-2x}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Zähler vereinfachen ergibt die Lösung:

$$f'(x)=\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird. Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$4-x^2=0$$

Wir lösen diese Gleichung durch Umformung nach x:

$$x^2=4$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$$

Vereinfachen:

$$|x|=2$$

Betragsgleichung lösen:

$$x=\pm 2$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=+2$ *und* $x=-2$.

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben:

$$f'(x)=\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel:

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}\qquad z(x)=\text{Zählerpolynom},\;\; n(x)=\text{Nennerpolynom}$$

Es ergibt sich als 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{\left(4-x^2\right)'\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]^2}$$

In der Formel kommen noch zwei Differentiale vor, die wir noch berechnen müssen.

Zuerst berechnen wir $\left(4-x^2\right)'$ *, indem wir die Summen- und Potenzregel anwenden:*

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]^2}$$

Das andere Differential steht am Ende des Zählers. Um es zu berechnen, müssen wir die Kettenregel anwenden. Sie lautet: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $\left(x^2+2x+4\right)$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion:*

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(x^2+2x+4\right)'}{\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]^2}$$

Durch Anwendung der Kettenregel haben wir das komplizierte Differential in ein einfaches Differential umgewandelt, welches wir mit Summen- und Potenzregel lösen:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(2x+2\right)}{\left[\left(x^2+2x+4\right)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz wir potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^4}$$

weiter auf der nächsten Seite

Fortsetzung

Die letzte Formel auf der vorigen Seite lautete:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^4}$$

Wir können im Zähler den Term $\left(x^2+2x+4\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x)=\frac{\left(x^2+2x+4\right)\bullet\left[-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)-\left(4-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(2x+2\right)\right]}{\left(x^2+2x+4\right)^4}$$

Dadurch können wir den Bruch mit $\left(x^2+2x+4\right)$ *kürzen:*

$$f''(x)=\frac{\cancel{\left(x^2+2x+4\right)}\bullet\left[-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(2x+2\right)\right]}{\cancel{\left(x^2+2x+4\right)}\cdot\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Es ergibt sich:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+2x+4\right)-\left(4-x^2\right)\cdot 2\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Im Zähler können wir beide Klammern mit dem davorstehenden Faktor multiplizieren:

$$f''(x)=\frac{-2x^3-4x^2-8x-\left(4-x^2\right)\cdot\left(4x+4\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Im Zähler die beiden Klammern ausmultiplizieren ergibt:

$$f''(x)=\frac{-2x^3-4x^2-8x-\left(16x+16-4x^3-4x^2\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x)=\frac{-2x^3-4x^2-8x-16x-16+4x^3+4x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Im Zähler werden nun gleiche Potenzen zusammengefaßt.
Wir erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{2x^3-24x-16}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x)=\frac{2x^3-24x-16}{\left(x^2+2x+4\right)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung.
Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen in der 2.Ableitung alle x durch 2 bzw. –2,
und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''(2)=\frac{2\cdot 2^3-24\cdot 2-16}{\left(2^2+2\cdot 2+4\right)^3}=\frac{16-48-16}{12^3}=\frac{-48}{12^3}=-\frac{48}{1728}=-\frac{1}{36}$$

$$f''(-2)=\frac{2(-2)^3-24(-2)-16}{\left((-2)^2+2(-2)+4\right)^3}=\frac{+16}{64}=+\frac{1}{4}$$

Auswertung des Ergebnisses:
An der Stelle x=2 hat die 2.Ableitung einen <u>negativen</u> Wert, also
hat die Funktion f(x) dort ein <u>Maximum</u>.

An der Stelle x=–2 hat die 2.Ableitung einen <u>positiven</u> Wert, also
hat die Funktion f(x) dort ein <u>Minimum</u>.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -2$ *ein Minimum*

$x = +2$ *ein Maximum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 4}$

$$f(-2) = \frac{(-2)}{(-2)^2 + 2\cdot(-2) + 4} = \frac{-2}{4-4+4} = -\frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$f(2) = \frac{2}{2^2 + 2\cdot 2 + 4} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}} \approx 0.167$$

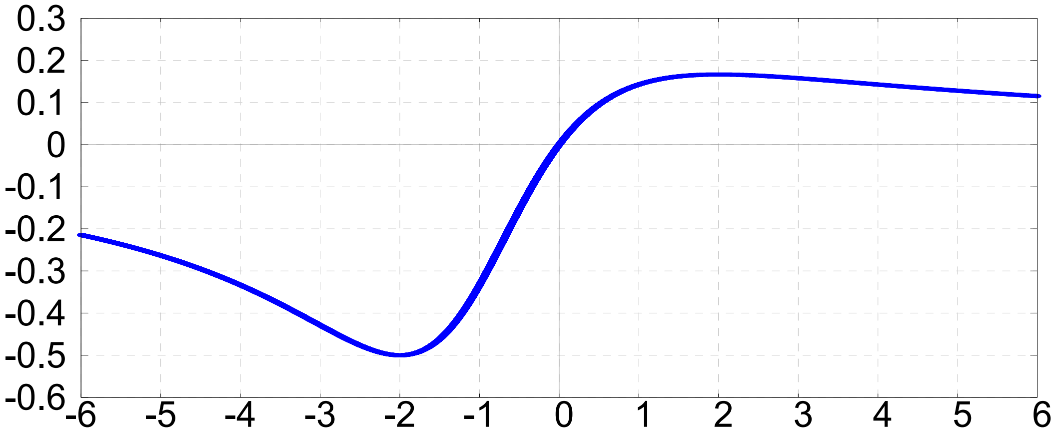
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben fo lg ende Koordinaten :

$\left(-2 \,/\, -\frac{1}{2}\right)$ *ist ein Minimum*

$\left(2 \,/\, \frac{1}{6}\right)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Lösung zu 1d

Gegeben:

$$f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$$

Gesucht:

Lokale Extrema

1.Ableitung berechnen:

Wir müssen die 1.Ableitung bilden :

$$f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$$

Wir differenzieren die Funktion mit Hilfe der Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-7x+6\right)'\cdot(x-10)-\left(x^2-7x+6\right)\cdot(x-10)'}{(x-10)^2}$$

Um $\left(x^2-7x+6\right)'$ bzw. $(x-10)'$ zu berechnen, müssen wir die Summenregel anwenden, d.h. wir müssen jeden Summanden einzeln (mit Hilfe der Potenzregel) differenzieren.

$$f'(x)=\frac{(2x-7)\cdot(x-10)-\left(x^2-7x+6\right)\cdot(1+0)}{(x-10)^2}$$

Zähler vereinfachen : Klammern ausmultiplizieren

$$f'(x)=\frac{2x^2-20x-7x+70\;-\left(x^2-7x+6\right)}{(x-10)^2}$$

Klammer im Zähler auflösen : Die Vorzeichen in der Klammer kehren sich um, weil "Minus" vor der Klammer

$$f'(x)=\frac{2x^2-20x-7x+70\;-x^2+7x-6}{(x-10)^2}$$

Zähler vereinfachen : Gleiche Potenzen zusammenfassen

$$f'(x)=\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$x^2-20x+64=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot 1\cdot 64}}{2\cdot 1}=\frac{20\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{20\pm 12}{2}$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=4$ *und* $x=16$.

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 20x + 64}{(x-10)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel:

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)' = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$ *$z(x)$ = Zählerpolynom, $n(x)$ = Nennerpolynom*

Es ergibt sich als 2.Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 20x + 64)' \cdot (x-10)^2 - (x^2 - 20x + 64) \cdot \left[(x-10)^2\right]'}{\left[(x-10)^2\right]^2}$$

In der Formel kommen noch zwei Differentiale vor, die wir noch berechnen müssen.

Zuerst berechnen wir $(x^2 - 20x + 64)'$, indem wir die Summen- und Potenzregel anwenden:

$$f''(x) = \frac{(2x-20) \cdot (x-10)^2 - (x^2 - 20x + 64) \cdot \left[(x-10)^2\right]'}{\left[(x-10)^2\right]^2}$$

Das andere Differential steht am Ende des Zählers. Um es zu berechnen, müssen wir die Kettenregel anwenden. Sie lautet: $\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

mit $(x-10)$ als innerer und x^2 als äußerer Funktion:

$$f''(x) = \frac{(2x-20) \cdot (x-10)^2 - (x^2 - 20x + 64) \cdot 2(x-10) \cdot 1}{\left[(x-10)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x) = \frac{(2x-20) \cdot (x-10)^2 - (x^2 - 20x + 64) \cdot 2(x-10)}{(x-10)^4}$$

weiter auf der nächsten Seite

Fortsetzung

Die letzte Formel auf der vorigen Seite lautete:

$$f''(x)=\frac{(2x-20)\cdot(x-10)^2-(x^2-20x+64)\cdot 2(x-10)}{(x-10)^4}$$

Wir können im Zähler den Term $(x-10)$ ausklammern:

$$f''(x)=\frac{(x-10)\bullet\left[(2x-20)\cdot(x-10)-(x^2-20x+64)\cdot 2\right]}{(x-10)^4}$$

Dadurch können wir den Bruch mit $(x-10)$ kürzen:

$$f''(x)=\frac{\cancel{(x-10)}\bullet\left[(2x-20)\cdot(x-10)-(x^2-20x+64)\cdot 2\right]}{\cancel{(x-10)}\cdot(x-10)^3}$$

Es ergibt sich:

$$f''(x)=\frac{(2x-20)\cdot(x-10)-(x^2-20x+64)\cdot 2}{(x-10)^3}$$

Im Zähler können wir die beiden ersten Klammern ausmultiplizieren:

$$f''(x)=\frac{2x^2-20x-20x+200-(x^2-20x+64)\cdot 2}{(x-10)^3}$$

Im Zähler die übrige Klammer mit dem dahinter stehenden Faktor 2 multiplizieren:

$$f''(x)=\frac{2x^2-20x-20x+200-(2x^2-40x+128)}{(x-10)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x)=\frac{2x^2-20x-20x+200-2x^2+40x-128}{(x-10)^3}$$

Im Zähler werden nun gleiche Potenzen zusammengefaßt.
Wir erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{72}{(x-10)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \frac{72}{(x-10)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung. Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen in der 2.Ableitung alle x durch 4 bzw. 16, und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''(4) = \frac{72}{(4-10)^3} = \frac{72}{-216} = -3$$

$$f''(16) = \frac{72}{(16-10)^3} = \frac{72}{216} = 3$$

Auswertung des Ergebnisses:

An der Stelle x=4 hat die 2.Ableitung einen <u>negativen</u> Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein <u>Maximum</u>.

An der Stelle x=16 hat die 2.Ableitung einen <u>positiven</u> Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein <u>Minimum</u>.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

x = 4 ein Maximum
x = 16 ein Minimum

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

$$f(4) = \frac{4^2 - 7 \cdot 4 + 6}{4 - 10} = \frac{-6}{-6} = 1$$

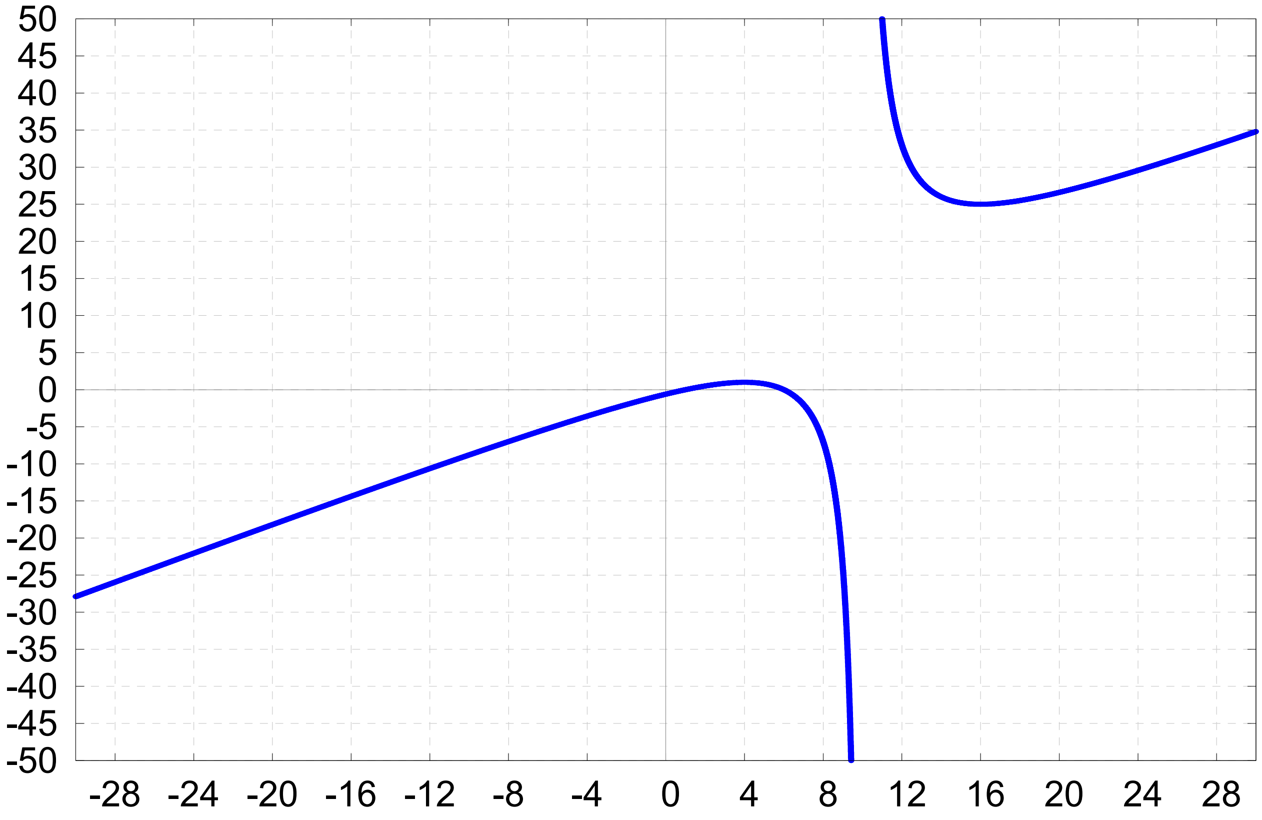
$$f(16) = \frac{16^2 - 7 \cdot 16 + 6}{16 - 10} = \frac{150}{6} = 25$$

Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

(4 /1) ist ein Maximum
(16/25) ist ein Minimum

Graph:



Lösung zu 1e

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)'\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)'}{x^2+3x+2}$$

Um $\left(x^2-3x+2\right)$ *bzw.* $\left(x^2+3x+2\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir jeweils die Summenregel und die Potenzregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\cdot(2x+3)}{x^2+3x+2}$$

Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-\left[2x^3+3x^2-6x^2-9x+4x+6\right]}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-2x^3-3x^2+6x^2+9x-4x-6}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Zähler vereinfachen :

$$f'(x)=\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$6x^2-12=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir durch umformen nach x:

$$6x^2=12$$
$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=+\sqrt{2}$ *und* $x=-\sqrt{2}$.

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben :

$$f'(x)=\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

$z(x)=$ *Zählerpolynom,* $n(x)=$ *Nennerpolynom*

Es ergibt sich als 2.Ableitung :

$$f''(x)=\frac{\left(6x^2-12\right)'\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]^2}$$

In der Formel kommen noch zwei Differentiale vor, die wir noch berechnen müssen.

Zuerst berechnen wir $\left(6x^2-12\right)'$ *, indem wir die Summen- und Potenzregel anwenden:*

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]^2}$$

Das andere Differential steht am Ende des Zählers. Um es zu berechnen,

müssen wir die Kettenregel anwenden. Sie lautet: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $\left(x^2+3x+2\right)$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion :*

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(x^2+3x+2\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)'}{\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]^2}$$

Wir erhalten ein einfacheres Differential (letzte Klammer im Zähler),
dass sich mit Hilfe der Summen- und Potenzregel lösen läßt:

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(x^2+3x+2\right)\cdot\left(2x+3\right)}{\left[\left(x^2+3x+2\right)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz
wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(x^2+3x+2\right)\cdot\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^4}$$

weiter auf der nächsten Seite

Fortsetzung

Die letzte Formel auf der vorigen Seite lautete:

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)^2-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(x^2+3x+2\right)\cdot\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^4}$$

Wir können im Zähler den Term $\left(x^2+3x+2\right)$ *ausklammern:*

$$f''(x)=\frac{\left(x^2+3x+2\right)\left[12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(2x+3\right)\right]}{\left(x^2+3x+2\right)^4}$$

Dadurch können wir den Bruch mit $\left(x^2+3x+2\right)$ *kürzen:*

$$f''(x)=\frac{\cancel{\left(x^2+3x+2\right)}\left[12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(2x+3\right)\right]}{\cancel{\left(x^2+3x+2\right)}\cdot\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Es ergibt sich:

$$f''(x)=\frac{12x\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Im Zähler den Faktor vor der ersten Klammer beseitigen, indem wir ausmultiplizieren :

$$f''(x)=\frac{12x^3+36x^2+24x-\left(6x^2-12\right)\cdot 2\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Im Zähler den Faktor vor der letzten Klammer beseitigen,
indem wir den Faktor mit der Klammer multiplizieren :

$$f''(x)=\frac{12x^3+36x^2+24x-\left(6x^2-12\right)\cdot\left(4x+6\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Im Zähler die beiden letzten Klammern ausmultiplizieren:

$$f''(x)=\frac{12x^3+36x^2+24x-\left(24x^3+36x^2-48x-72\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x)=\frac{12x^3+36x^2+24x-24x^3-36x^2+48x+72}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Im Zähler werden nun gleiche Potenzen zusammengefaßt.
Wir erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{-12x^3+72x+72}{\left(x^2+3x+2\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \frac{-12x^3 + 72x + 72}{\left(x^2 + 3x + 2\right)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung.
Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen in der 2.Ableitung alle x durch $+\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$,
und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{-12\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 72\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 72}{\left(\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 3\left(-\sqrt{2}\right) + 2\right)^3} = \frac{-12\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 72\sqrt{2} + 72}{\left(2 + 3\left(-\sqrt{2}\right) + 2\right)^3} = \frac{-48\sqrt{2} + 72}{\left(4 - 3\sqrt{2}\right)^3} \approx -288.25$$

$$f''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{-12\sqrt{2}^3 + 72\sqrt{2} + 72}{\left(\sqrt{2}^2 + 3\sqrt{2} + 2\right)^3} = \frac{-12\sqrt{2}^3 + 72\sqrt{2} + 72}{\left(4 + 3\sqrt{2}\right)^3} = \frac{-12\sqrt{2}\cdot 2 + 72\sqrt{2} + 72}{\left(4 + 3\sqrt{2}\right)^3} = \frac{48\sqrt{2} + 72}{\left(4 + 3\sqrt{2}\right)^3} \approx 0.24978$$

Auswertung des Ergebnisses:
An der Stelle $x = -\sqrt{2}$ hat die 2.Ableitung einen <u>negativen</u> Wert, also
hat die Funktion f(x) dort ein <u>Maximum</u>.

An der Stelle $x = \sqrt{2}$ hat die 2.Ableitung einen <u>positiven</u> Wert, also
hat die Funktion f(x) dort ein <u>Minimum</u>.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -\sqrt{2}$ *ein Maximum*

$x = +\sqrt{2}$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 2}{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 2} = \frac{2 + 3\sqrt{2} + 2}{2 - 3\sqrt{2} + 2} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \approx \boxed{-33.970563}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + 2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + 2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right) - 3 + \left(\sqrt{2}\right)\right]}{\left(\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right) + 3 + \left(\sqrt{2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right) - 3 + \left(\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right) + 3 + \left(\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{2}\right) - 3}{2\left(\sqrt{2}\right) + 3} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 - 3}{\left(\sqrt{2}\right)^3 + 3} = \frac{\sqrt{8} - 3}{\sqrt{8} + 3} \approx \boxed{-0.0294372}$$

Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-\sqrt{2} \;/\; -33.970563\right)$ *ist ein Maximum*

$\left(\sqrt{2} \;/\; -0.0294372\right)$ *ist ein Minimum*

Graph:

Lösung zu 1f

Gegeben: $f(x)=\frac{x}{x^2+12x+16}$

Gesucht: *Lokale Extrema*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+12x+16}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{(x)'\cdot\left(x^2+12x+16\right)-x\cdot\left(x^2+12x+16\right)'}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Um $\left(x^2+12x+16\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summen – und Potenzregel :*

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+12x+16\right)-x\cdot(2x+12)}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Die Klammern im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{x^2+12x+16-\left[2x^2+12x\right]}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Eckige Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der eckigen Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{x^2+12x+16-2x^2-12x}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$16-x^2=0$$

Wir lösen die Gleichung, indem wir die Gleichung nach x^2 *auflösen:*

$$16 = x^2$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel:

$$x=\pm 4$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-4}$ *und* $\boxed{x=4}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Die 2.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die 1.Ableitung, die wir im vorletzten Schritt berechnet haben :

$$f'(x)=\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Wir wollen die 2.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)'=\frac{z'(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$ $z(x)=$ *Zählerpolynom*, $n(x)=$ *Nennerpolynom*

Es ergibt sich als 2.Ableitung :

$$f''(x)=\frac{\left(16-x^2\right)'\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]^2}$$

In der Formel kommen noch zwei Differentiale vor, die wir noch berechnen müssen.

Zuerst berechnen wir $\left(16-x^2\right)'$*, indem wir die Summen- und Potenzregel anwenden:*

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]'}{\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]^2}$$

Das andere Differential steht am Ende des Zählers. Um es zu berechnen,

müssen wir die Kettenregel anwenden. Sie lautet: $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$

mit $\left(x^2+12x+16\right)$ *als innerer und* x^2 *als äußerer Funktion :*

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+12x+16\right)\cdot\left(x^2+12x+16\right)'}{\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]^2}$$

Wir erhalten ein einfacheres Differential (letzte Klammer im Zähler),
dass sich mit Hilfe der Summen- und Potenzregel lösen läßt:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+12x+16\right)\cdot\left(2x+12\right)}{\left[\left(x^2+12x+16\right)^2\right]^2}$$

Im Nenner wenden wir das 3.Potenzgesetz an: Eine Potenz
wird potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+12x+16\right)\cdot\left(2x+12\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^4}$$

weiter auf der nächsten Seite

Fortsetzung

Die letzte Formel auf der vorigen Seite lautete:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)^2-\left(16-x^2\right)\cdot 2\left(x^2+12x+16\right)\cdot\left(2x+12\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^4}$$

Wir können im Zähler den Term $\left(x^2+12x+16\right)$ ausklammern:

$$f''(x)=\frac{\left(x^2+12x+16\right)\cdot\left[-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)-\left(16-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(2x+12\right)\right]}{\left(x^2+12x+16\right)^4}$$

Dadurch können wir den Bruch mit $\left(x^2+12x+16\right)$ kürzen:

$$f''(x)=\frac{\cancel{\left(x^2+12x+16\right)}\cdot\left[-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)-\left(16-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(2x+12\right)\right]}{\cancel{\left(x^2+12x+16\right)}\cdot\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Es ergibt sich:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+12x+16\right)-\left(16-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(2x+12\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Im Zähler den Faktor –2x vor der ersten Klammer beseitigen,
indem wir den Faktor mit der Klammer multiplizieren :

$$f''(x)=\frac{-2x^3-24x^2-32x-\left(16-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(2x+12\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Im Zähler den Faktor vor der letzten Klammer beseitigen,
indem wir den Faktor 2 mit der Klammer multiplizieren :

$$f''(x)=\frac{-2x^3-24x^2-32x-\left(16-x^2\right)\cdot\left(4x+24\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Im Zähler die beiden letzten Klammern ausmultiplizieren:

$$f''(x)=\frac{-2x^3-24x^2-32x-\left[64x+384-4x^3-24x^2\right]}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Nun lösen wir die Klammer im Zähler auf. Weil ein "Minus" vor der Klammer steht, müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren:

$$f''(x)=\frac{-2x^3-24x^2-32x-64x-384+4x^3+24x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Im Zähler werden nun gleiche Potenzen zusammengefaßt.
Wir erhalten die gesuchte 2.Ableitung:

$$f''(x)=\frac{2x^3-96x-384}{\left(x^2+12x+16\right)^3}$$

Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung:

Wir haben im vorigen Schritt die 2.Ableitung berechnet:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 96x - 384}{\left(x^2 + 12x + 16\right)^3}$$

Nun berechnen wir den Wert der 2.Ableitung an den Nullstellen der 1.Ableitung.
Praktisch bedeutet dies: Wir ersetzen in der 2.Ableitung alle x durch $+\sqrt{2}$ *bzw.* $-\sqrt{2}$,
und berechnen dann den Wert dieses Ausdrucks :

$$f''(4) = \frac{2 \cdot 4^3 - 96 \cdot 4 - 384}{\left(4^2 + 12 \cdot 4 + 16\right)^3} = \frac{-640}{512000} = \frac{-640}{512000} = -\frac{1}{800}$$

$$f''(-4) = \frac{2(-4)^3 - 96 \cdot (-4) - 384}{\left((-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 16\right)^3} = \frac{-128}{-4096} = \frac{1}{32}$$

Auswertung des Ergebnisses:
An der Stelle x=4 hat die 2.Ableitung einen negativen Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein Maximum.

An der Stelle x=–4 hat die 2.Ableitung einen positiven Wert, also hat die Funktion f(x) dort ein Minimum.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x-Koordinaten der Extrema berechnet:

$x = -4$ *ein Minimum*

$x = 4$ *ein Maximum*

Um die y-Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x-Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 12x + 16}$

$$f(-4) = \frac{x}{(-4)^2 + 12\cdot(-4) + 16} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

$$f(4) = \frac{x}{4^2 + 12\cdot 4 + 16} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = \boxed{0.05}$$

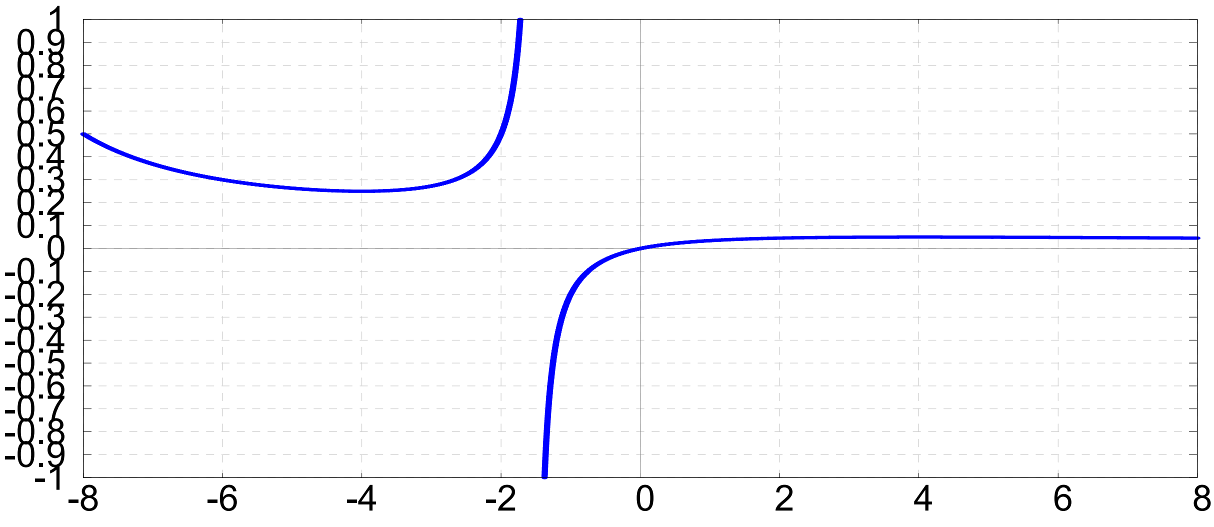
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten:

$(-4 \;/\; 0.25)$ *ist ein Minimum*

$(4 \;/\; 0.05)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Hinweis:
Das x=4 ein Maximum ist, kann man am Graphen schwer erkennen, da die Funktion für x>4 nur sehr langsam fällt.