Übungen zu

Extrema gebrochen rationaler Funktionen

Lösungsmethode

Tabellenverfahren

Version

Testversion vom 5.09.2007 / 19.30 h

Übungen: Extrem- und Sattelpunkte gebroch.-rat. Funktionen

1. Finde lokale Extrema der gebrochen rationalen Funktionen.
Berechne diese Punkte mit der 1.Ableitung und Tabelle (ohne die 2.Ableitung)
Da sich die Sattelstellen automatisch ergeben, berechne auch die Sattelpunkte.

1a)	$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$	1 Extremum
1b)	$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$	2 Extrema
1c)	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$	2 Extrema
1d)	$f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$	2 Extrema
1e)	$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$	2 Extrema
1f)	$f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$	2 Extrema
1g)	$f(x)=\dfrac{2x+5}{3x^2-8x-2}$	2 Extrema
1h)	$f(x)=\dfrac{3x^2+6x-1}{x^2-2x+2}$	2 Extrema
1i)	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+12x+16}$	2 Extrema
1j)	$f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt
1k)	$f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt
1L)	$f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$	1 Extremum 1 Sattelpunkt

Lösung zu 1a

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(-x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(-x^2+x+1\right)}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Um $\left(x^2-x+1\right)$ *bzw.* $\left(-x^2+x+1\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot\left(-x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\cdot(-2x+1)}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Die Klammern im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2x^2+2x+x^2-x-1-\left[-2x^3+x^2+2x^2-x-2x+1\right]}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Eckige Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der eckigen Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2x^2+2x+x^2-x-1+2x^3-x^2-2x^2+x+2x-1}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{4x-2}{\left(-x^2+x+1\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{4x-2}{\left(-x^2+x+1\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$4x-2=0$$

Wir lösen die Gleichung durch Umstellen der Formel nach x.

Zuerst addieren wir 2 auf beiden Seiten:

$$4x=2$$

Jetzt teilen wir die Gleichung durch 4:

$$x = \frac{2}{4}$$

Jetzt müssen wir das Ergebnis nur noch kürzen:

$$x = \frac{1}{2}$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ *die einzige Nullstelle der 1.Ableitung ist.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1}$$

Pole können an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$-x^2 + x + 1 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

Dies sind die beiden möglichen Pole.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die einzige Nullstelle der 1.Ableitung lautet : $x = 0.5$ *. Wir tragen diese Stelle in eine Tabelle ein, außerdem die Stelle, an der sich möglicherweise ein Pol befindet sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen :*

x	Gewählt :	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -0.618	*unwichtig*	*unwichtig*	*unwichtig*	
-0.618	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
-0.618 bis 0.5				
0.5	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
0.5 bis 1.618				
1.618	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
1.618 bis ∞	*unwichtig*	*unwichtig*	*unwichtig*	

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 0.5$ *um Minimum, Maximum oder Sattelpunkt handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in dem Intervall vor bzw. nach dieser Stelle steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die beiden *Stellen* x=0 *und* x=1 *:*

Erste Ableitung :

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x-2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ *:*

$$f'(\mathbf{0}) = \frac{4\cdot(\mathbf{0})-2}{\left(\mathbf{0}^2-2\cdot\mathbf{0}+2\right)^2} = \frac{-2}{4} < 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 1$ *:*

$$f'(\mathbf{1}) = \frac{4\cdot\mathbf{1}-2}{\left(\mathbf{1}^2-2\cdot\mathbf{1}+2\right)^2} = \frac{2}{1} > 0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt :

x	Gewählt :	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -0.618	*unwichtig*	*unwichtig*	*unwichtig*	
-0.618	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
-0.618 bis 0.5	*x = 0*	*negativ*	*fällt*	
0.5	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *Minimum*
0.5 bis 1.618	*x = 1*	*positiv*	*steigt*	
1.618	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
1.618 bis ∞	*unwichtig*	*unwichtig*	*unwichtig*	

Nun können wir erkennen, ob bei x=0.5 ein *Maximum, Minimum oder Sattelpunkt* vorliegt.
Weil die Funktion vor der Stelle $x = 0.5$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = 0.5 \text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Minimums berechnet :

$x = \frac{1}{2}$ *ist ein Minimum*

Um die y - Koordinate des Minimums zu berechnen, setzen wir die

x - Koordinate in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}}{-\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{3}{5}} = \boxed{0.6}$$

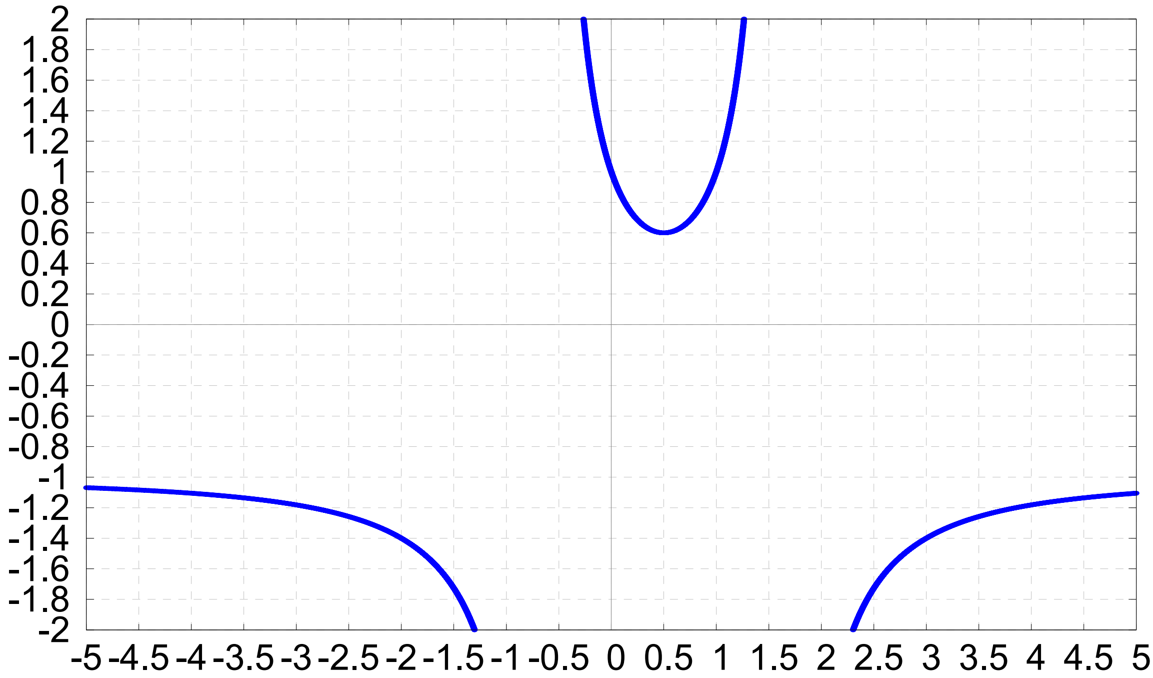
Ergebnis:

Das einzige Extremum der Funktion hat somit folgende Koordinaten :

$\left(\frac{1}{2} \;/\; \frac{3}{5} \right)$ *ist ein Minimum*

Oder in Dezimalschreibweise : $(0.5 \;/\; 0.6)$

Graph:



Lösung zu 1b

Gegeben:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Gesucht:

Lokale Extrema, Terassenpunkte

1.Ableitung berechnen:

Zuerst müssen wir die 1.Ableitung bilden:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Wir differenzieren die Funktion mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{\left[n(x)\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Um $\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$ zu berechnen, müssen wir die Summenregel anwenden, d.h. wir müssen jeden Summanden einzeln differenzieren.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Zähler vereinfachen

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Zähler vereinfachen:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$1-x^2=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir durch Umstellen:

$$1=x^2$$
$$x=\pm 1$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: ***x = 1*** *und* ***x = –1***.

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete :

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Pole können an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen :

$$1+x^2=0$$

Wir subtrahieren 1 auf beiden Seiten :

$$x^2=-1$$

Da diese Gleichung (in der Menge der reellen Zahlen) nicht lösbar ist, kann der Nenner nicht zu Null werden und die Funktion $f\left(x\right)$ hat somit <u>keine</u> Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-1$ *und* $x=1$.
Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1				
-1	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
-1 bis 1				
1	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
1 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-1$ *und* $x=1$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*

Dazu wählen wir aus allen drei Intervallen eine Stelle, z.B. die drei Stellen $x=-2$, $x=0$ *und* $x=2$:

Erste Ableitung: $$\boxed{f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-2$: $$f'(-2)=\frac{1-(-2)^2}{\left(1+(-2)^2\right)^2}=\frac{-3}{25}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$: $$f'(0)=\frac{1-0^2}{\left(1+0^2\right)^2}=\frac{1}{1}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$: $$f'(2)=\frac{1-2^2}{\left(1+2^2\right)^2}=\frac{-3}{25}<0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1	$x=-2$	negativ	fällt	
-1	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
-1 bis 1	$x=0$	positiv	steigt	
1	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
1 bis ∞	$x=2$	negativ	fällt	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. Weil die Funktion vor der Stelle x=–1 fällt und nach ihr steigt, ist bei **x = –1 ein Minimum**.
2. Weil die Funktion vor der Stelle x=1 steigt und nach ihr fällt, ist bei **x = 1 ein Maximum**.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

x = –1 für das Minimum
x = 1 für das Maximum

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

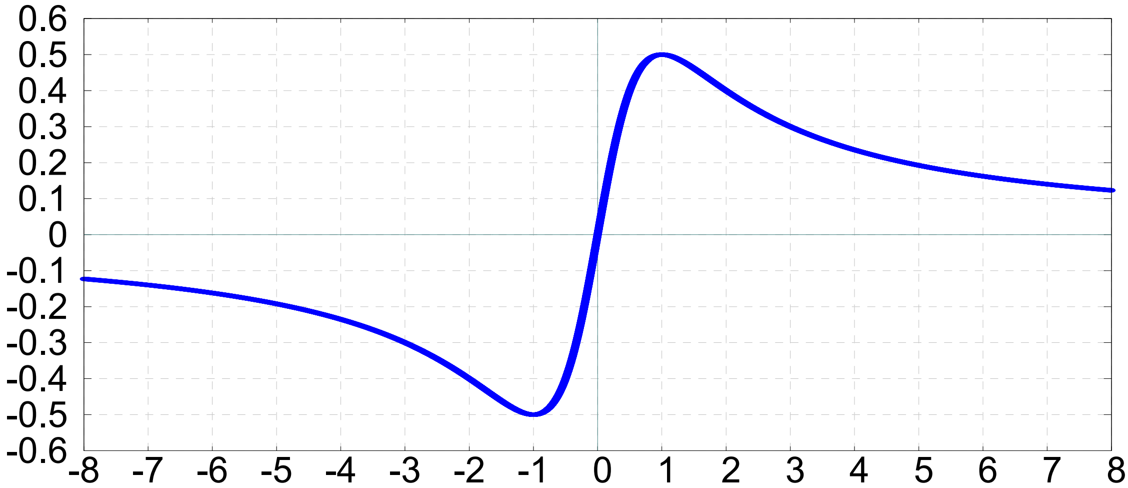
$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-1 / -\frac{1}{2}\right)$ **ist ein Minimum**
$\left(1 / \frac{1}{2}\right)$ **ist ein Maximum**

Graph:



Lösung zu 1c

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+4}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+4}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{z(x)}{n(x)}\right]=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)\cdot\left(x^2+2x+4\right)-x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+2x+4\right)}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Die Ableitung von x ist 1. Um $2x+2$ zu differenzieren,

benutzen wir die Summenregel, und erhalten :

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+2x+4\right)-x\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{x^2+2x+4-\left[2x^2+2x\right]}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=\frac{x^2+2x+4-2x^2-2x}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Zähler vereinf achen ergibt die Lösung :

$$f'(x)=\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird. Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$4-x^2=0$$

Wir lösen diese Gleichung durch Umformung nach x:

$$x^2=4$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$$

Vereinfachen:

$$|x|=\sqrt{4}$$

Vereinfachen:

$$x=\pm 2$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=+2$ *und* $x=-2$.

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$$

Pole können an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

An dieser Stelle können wir die Rechnung abbrechen: Die Wurzel ist (in der Menge der reellen Zahlen) nicht definiert, da der Radikand negativ ist. Somit ist die Gleichung nicht lösbar, d.h. der Nenner der Funktion $f(x)$ kann nicht Null werden und daher hat die Funktion $f(x)$ auch keine Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=+2$ *und* $x=-2$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen:*

	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2				
-2	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
-2 bis 2				
2	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
2 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-2$ *und* $x=2$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die drei Stellen $x=-3$, $x=0$ *und* $x=3$:

Erste Ableitung: $$\boxed{f'(x)=\frac{4-x^2}{\left(x^2+2x+4\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-3$: $$f'(-3)=\frac{4-(-3)^2}{\left((-3)^2+2\cdot(-3)+4\right)^2}=\frac{-5}{49}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$: $$f'(0)=\frac{4-0^2}{\left(0^2+2\cdot 0+4\right)^2}=\frac{4}{16}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=3$: $$f'(3)=\frac{4-3^2}{\left(3^2+2\cdot 3+4\right)^2}=\frac{-5}{361}<0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	-3	negativ	fällt	
-2	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Minimum*
-2 bis 2	0	positiv	steigt	
2	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ *Maximum*
2 bis ∞	3	negativ	fällt	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:
1.Weil die Funktion vor der Stelle $x=-2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-2 \text{ ein Minimum}}$.
2.Weil die Funktion vor der Stelle $x=+2$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x=+2 \text{ ein Maximum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -2$ *ein Minimum*

$x = +2$ *ein Maximum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$

$$f(-2) = \frac{(-2)}{(-2)^2 + 2\cdot(-2) + 4} = \frac{-2}{4 - 4 + 4} = -\frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$f(2) = \frac{2}{2^2 + 2\cdot 2 + 4} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}} \approx 0.167$$

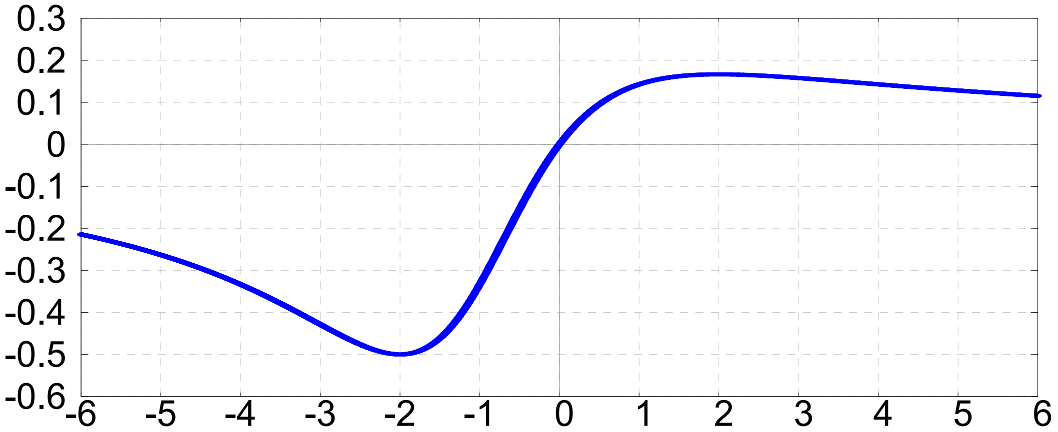
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-2 \,/\, -\frac{1}{2}\right)$ *ist ein Minimum*

$\left(2 \,/\, \frac{1}{6}\right)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Lösung zu 1d

Gegeben:

$$f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$$

Gesucht:

Lokale Extrema, Terassenpunkte

1.Ableitung berechnen:

Wir müssen die 1.Ableitung bilden :

$$f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$$

Wir differenzieren die Funktion mit Hilfe der Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-7x+6\right)\cdot(x-10)-\left(x^2-7x+6\right)\cdot\frac{d}{dx}(x-10)}{(x-10)^2}$$

Um $\frac{d}{dx}\left(x^2-7x+6\right)$ und $\frac{d}{dx}(x-10)$ zu berechnen, müssen wir die Summenregel anwenden, d.h. wir müssen jeden Summanden einzeln differenzieren.

$$f'(x)=\frac{(2x-7)\cdot(x-10)-\left(x^2-7x+6\right)\cdot 1}{(x-10)^2}$$

Zähler vereinfachen : Klammern ausmultiplizieren

$$f'(x)=\frac{2x^2-20x-7x+70\ -\left(x^2-7x+6\right)}{(x-10)^2}$$

Zähler vereinfachen : Klammer auflösen

$$f'(x)=\frac{2x^2-20x-7x+70\ -x^2+7x-6}{(x-10)^2}$$

Zähler vereinfachen : Gleiche Summanden zusammenfassen

$$f'(x)=\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{x^2-20x+64}{\left(x-10\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen:

$$x^2-20x+64=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\left(-20\right)\pm\sqrt{\left(-20\right)^2-4\cdot 1\cdot 64}}{2\cdot 1}=\frac{20\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{20\pm 12}{2}$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten: $x=4$ *und* $x=16$.

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x - 10 = 0$$

Wir addieren 10 auf beiden Seiten:

$$x = 10$$

Der Funktion hat an der Stelle $x = 10$ möglicherweise einen Pol.

Anmerkung:
Ob bei $x = 10$ wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = 4$ und $x = 16$. Wir tragen diese Stellen in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und *nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir die Stelle ein, an denen sich möglicherweise ein Pol befindet:*

Intervall	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 4				
4	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
4 bis 10				
10	– – –	– – –	möglicher Pol	
10 bis 16				
16	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
16 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = 4$ und $x = 16$ um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen $x = 1$, $x = 5$, $x = 15$ und $x = 20$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 20x + 64}{(x-10)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{1^2 - 20 \cdot 1 + 64}{(1-10)^2} = \frac{45}{81} > 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 5$:

$$f'(5) = \frac{5^2 - 20 \cdot 5 + 64}{(5-10)^2} = \frac{-11}{25} < 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 15$:

$$f'(15) = \frac{15^2 - 20 \cdot 15 + 64}{(15-10)^2} = \frac{-11}{25} < 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 20$:

$$f'(20) = \frac{20^2 - 20 \cdot 20 + 64}{(20-10)^2} = \frac{64}{100} > 0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

Intervall	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 4	1	positiv	steigt	
4	– – –	Null	horizontal	⇐ Maximum
4 bis 10	5	negativ	fällt	
10	– – –	– – –	möglicher Pol	
10 bis 16	15	negativ	fällt	
16	– – –	Null	horizontal	⇐ Minimum
16 bis ∞	20	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. Weil die Funktion vor der Stelle x=4 steigt und nach ihr fällt, ist bei **x = 4 ein Maximum**.
2. Weil die Funktion vor der Stelle x=16 fällt und nach ihr steigt, ist bei **x = 16 ein Minimum**.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x-Koordinaten der Extrema berechnet:

x = 4 ein Maximum
x = 16 ein Minimum

Um die y-Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x-Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$

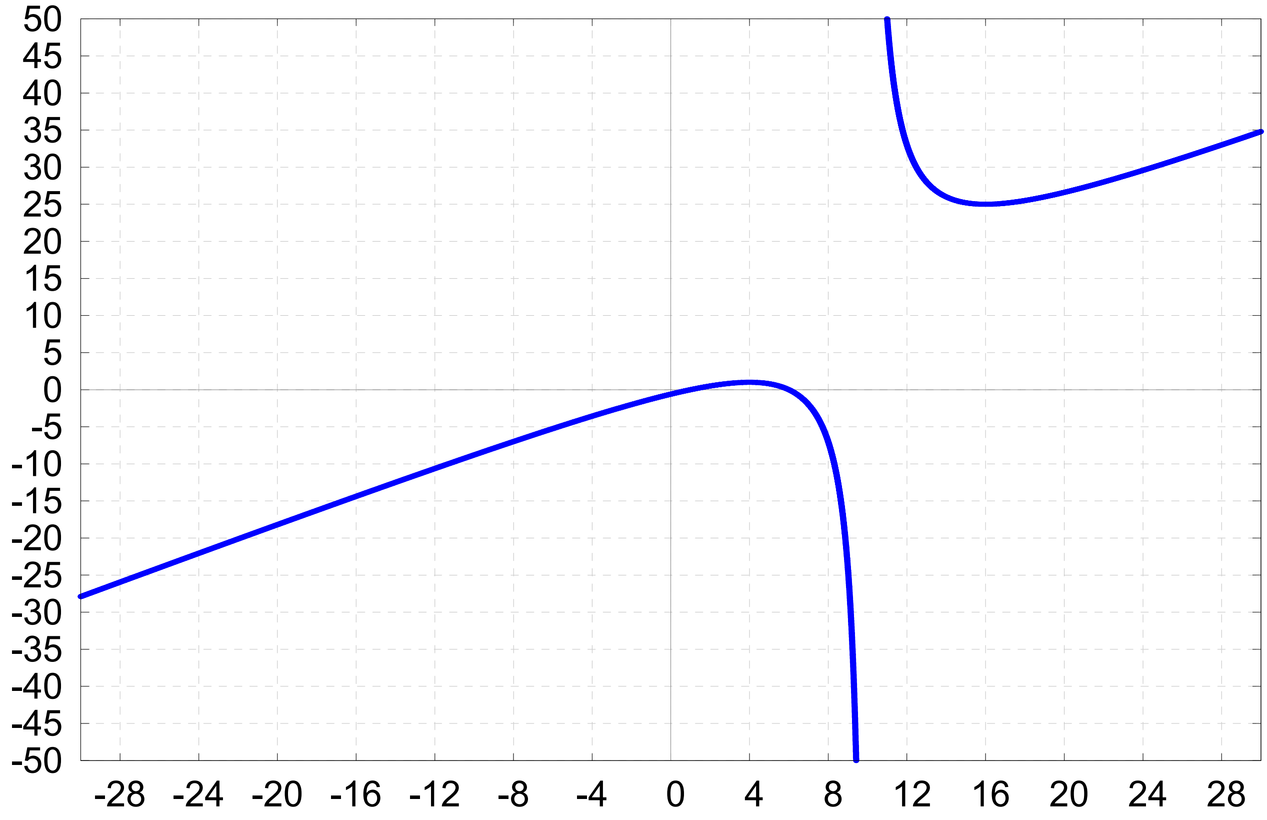
$$f(4) = \frac{4^2-7\cdot 4+6}{4-10} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$f(16) = \frac{16^2-7\cdot 16+6}{16-10} = \frac{150}{6} = 25$$

Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten:
(4/1) ist ein Maximum
(16/25) ist ein Minimum

Graph:



Lösung zu 1e

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-3x+2\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+2\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Um $\left(x^2-3x+2\right)$ *und* $\left(x^2+3x+2\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2-3x+2\right)\cdot(2x+3)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-\left[2x^3-6x^2+4x+3x^2-9x+6\right]}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-2x^3+6x^2-4x-3x^2+9x-6}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Zähler vereinfachen :

$$f'(x)=\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen :

$$\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler mit Null gleichsetzen :

$$6x^2-12=0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir durch umformen nach x:

$$6x^2=12$$
$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauten : $x=+\sqrt{2}$ *und* $x=-\sqrt{2}$.

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Mögliche Pole sind die Stellen $x = -1$ und $x = -2$.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=+\sqrt{2}$ *und* $x=-\sqrt{2}$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, zweitens die Intervalle vor und nach diesen Stellen, sowie drittens die möglichen Pole:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	unwichtig		unwichtig	
-2	---	---	möglicher Pol	
-2 bis $-\sqrt{2}$				
$-\sqrt{2}$	---	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
$-\sqrt{2}$ bis -1				
-1	---	---	möglicher Pol	
-1 bis $\sqrt{2}$				
$\sqrt{2}$	---	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
$\sqrt{2}$ bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-\sqrt{2}$ *und* $x=\sqrt{2}$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen $x=-1.5$, $x=-1.4$, $x=0$ *und* $x=2$:

Erste Ableitung:
$$\boxed{f'(x)=\frac{6x^2-12}{\left(x^2+3x+2\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1.5$:
$$f'(-1.5)=\frac{6\cdot(-1.5)^2-12}{\left((-1.5)^2+3(-1.5)+2\right)^2}=\frac{1.5}{0.0625}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1.4$:
$$f'(-1.4)=\frac{6\cdot(-1.4)^2-12}{\left((-1.4)^2+3(-1.4)+2\right)^2}=\frac{-0.24}{0.0576}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$:
$$f'(0)=\frac{6\cdot 0^2-12}{\left(0^2+3\cdot 0+2\right)^2}=-\frac{12}{4}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$:
$$f'(2)=\frac{6\cdot 2^2-12}{\left(2^2+3\cdot 2+2\right)^2}=\frac{12}{144}>0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2	unwichtig	unwichtig	unwichtig	
-2	---	---	möglicher Pol	
-2 bis $-\sqrt{2}$	-1.5	positiv	steigt	
$-\sqrt{2}$	---	Null	horizontal	⇐ Maximum
$-\sqrt{2}$ bis -1	-1.4	negativ	fällt	
-1	---	---	möglicher Pol	
-1 bis $\sqrt{2}$	0	negativ	fällt	
$\sqrt{2}$	---	Null	horizontal	⇐ Minimum
$\sqrt{2}$ bis ∞	2	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

Weil die Funktion vor der Stelle $x=-\sqrt{2}$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x=-\sqrt{2}\text{ ein Maximum}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x=+\sqrt{2}$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=+\sqrt{2}\text{ ein Minimum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -\sqrt{2}$ *ein Maximum*

$x = +\sqrt{2}$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 2}{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 2} = \frac{2 + 3\sqrt{2} + 2}{2 - 3\sqrt{2} + 2} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \approx \boxed{-33.970563}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + 2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + 2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right) - 3 + \left(\sqrt{2}\right)\right]}{\left(\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right) + 3 + \left(\sqrt{2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right) - 3 + \left(\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right) + 3 + \left(\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{2}\right) - 3}{2\left(\sqrt{2}\right) + 3} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 - 3}{\left(\sqrt{2}\right)^3 + 3} = \frac{\sqrt{8} - 3}{\sqrt{8} + 3} \approx \boxed{-0.0294372}$$

Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-\sqrt{2}\ /\ -33.970563\right)$ *ist ein Maximum*

$\left(\sqrt{2}\ /\ -0.0294372\right)$ *ist ein Minimum*

Graph:

Lösung zu 1f

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Sattelpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3+x\right)\cdot\left(x^4-x^2+1\right)-\left(x^3+x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^4-x^2+1\right)}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$$

Um $\left(x^3+x\right)$ *und* $\left(x^4-x^2+1\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+1\right)\cdot\left(x^4-x^2+1\right)-\left(x^3+x\right)\cdot\left(4x^3-2x\right)}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$$

Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{3x^6-3x^4+3x^2+x^4-x^2+1-\left[4x^6-2x^4+4x^4-2x^2\right]}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^6-3x^4+3x^2+x^4-x^2+1-4x^6+2x^4-4x^4+2x^2}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$$

Zähler vereinfachen :

$$f'(x)=\frac{-x^6-4x^4+4x^2+1}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{-x^6-4x^4+4x^2+1}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird. Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$-x^6-4x^4+4x^2+1=0$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit –1:

$$x^6+4x^4-4x^2-1=0$$

Dies ist eine Gleichung 6.Grades, für die es keine Lösungsformel gibt. Man kann aber eine Substitution durchführen ($x^2=z$) und erhält eine Gleichung 3.Grades:

$$z^3+4z^2-4z-1=0$$

Da man in der Schulmathematik die Lösungsformel für Gleichungen 3.Grades nicht lernt, müssen wir eine andere Methode versuchen, um diese Gleichung 3.Grades zu lösen. Wir erinnern uns an einen Satz aus der Algebra: "Falls eine ganzrationale Funktion ganzzahlige Lösungen hat, dann sind sie unter den Teilern des Absolutgliedes zu finden". Wir lösen die Gleichung also durch Probieren, indem wir die "Teiler des Absolutgliedes" (+1 und –1) der Reihe nach in die Gleichung einsetzen:

Wir erhalten die Lösungen der substituierten Gleichung: $\boxed{z=1}$

Da eine Gleichung 3.Grades aber aber drei Lösungen haben kann, müssen wir nach weiteren Lösungen suchen. Weil $z=1$ eine Lösung ist, können wir den Faktor $(z-1)$ aus der Gleichung 3.Grades abspalten. Dazu teilen wir die Gleichung 3.Grades durch $(z-1)$:

$$\left(z^3+4z^2-4z-1\right)\ :\ (z-1)\ =\ z^2+5z+1$$

Die Gleichung 3.Grades kann man also schreiben als:

$$\left(z^2+5z+1\right)\cdot(z-1)=0$$

Ein Produkt ist ja genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Die restlichen Lösungen liefert die linke Klammer, wenn wir sie mit Null gleichsetzen:

$$z^2+5z+1=0$$

Zur Lösung dieser quadratischen Gleichung benutzen wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\boxed{\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}}$$

Nun führen wir die Rücksubstitution durch: $x^2=z$. Dies führt zu den zwei Gleichungen:

$$x^2=1 \qquad \text{und} \qquad x^2=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

Die erste Gleichung ergibt die $\boxed{\textbf{Lösungen } x=-1 \textbf{ und } x=1}$. *Die zweite Gleichung ist unlösbar, denn auf der rechten Seite stehen negative Werte, aber die linke Seite ist (als Quadrat) stets positiv.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x^4-x^2+1=0$$

Wir benutzen das Lösungsverfahren "Substitution", sodaß eine quadratisch Gleichung entsteht, die wir mit der "Lösungsformel für quadratische Gleichungen" lösen. Zunächst substituieren wir also x^2 durch z:

$$z^2-z+1=0$$

Jetzt benutzen wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen", um die substituierte Gleichung zu lösen:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

An dieser Stelle können wir die Rechnung vorzeitig abbrechen:
Die Wurzel ist (in der Menge der reellen Zahlen) nicht definiert, da der Radikand negativ ist. Somit ist die Gleichung nicht lösbar, d.h. der Nenner der Funktion $f(x)$ kann nicht Null werden und daher hat die Funktion $f(x)$ auch keine Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x = +1$ *und* $x = -1$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1				
-1	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-1 bis 1				
1	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
1 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x = -1$ *und* $x = 1$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen $x = -2$, $x = 0$ *und* $x = 2$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^6 - 4x^4 + 4x^2 + 1}{\left(x^4 - x^2 + 1\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = -2$:

$$f'(-2) = \frac{-(-2)^6 - 4(-2)^4 + 4(-2)^2 + 1}{\left[(-2)^4 - (-2)^2 + 1\right]^2} = \frac{-111}{169} < 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{-(0)^6 - 4(0)^4 + 4(0)^2 + 1}{\left[(0)^4 - (0)^2 + 1\right]^2} = \frac{1}{1} > 0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x = 2$:

$$f'(2) = \frac{-2^6 - 4 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 + 1}{\left(2^4 - 2^2 + 1\right)^2} = \frac{-111}{169} > 0$$

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -1	-2	*negativ*	*fällt*	
-1	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Minimum
-1 bis 1	0	*positiv*	*steigt*	
1	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis ∞	2	*negativ*	*fällt*	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

Weil die Funktion vor der Stelle $x = -1$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x = -1 \text{ ein Minimum}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x = +1$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x = +1 \text{ ein Maximum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -1$ *ein Maximum*

$x = +1$ *ein Minimum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 + (-1)}{(-1)^4 - (-1)^2 + 1} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$$

$$f(1) = \frac{1^3 + 1}{1^4 - 1^2 + 1} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

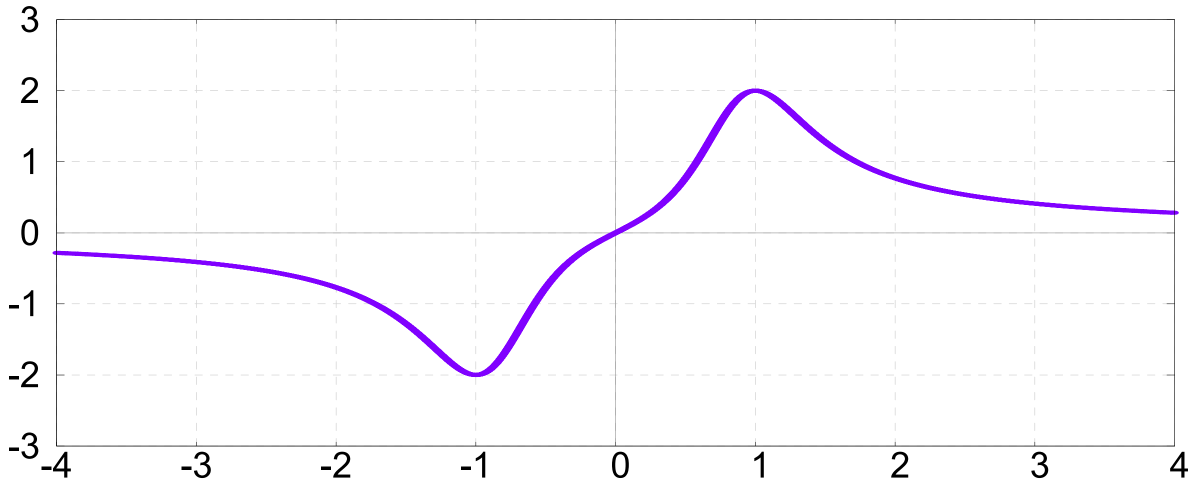
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$(-1 / -2)$ *ist ein Maximum*

$(1 / 2)$ *ist ein Minimum*

Graph:



Lösung zu 1g

Gegeben: $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x^2-8x-2}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{2x+5}{3x^2-8x-2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(2x+5)\cdot(3x^2-8x-2)-(2x+5)\cdot\frac{d}{dx}(3x^2-8x-2)}{(3x^2-8x-2)^2}$$

Um $(2x+5)$ *bzw.* $(3x^2-8x-2)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{2\cdot(3x^2-8x-2)-(2x+5)\cdot(6x-8)}{(3x^2-8x-2)^2}$$

Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{6x^2-16x-4-(12x^2-16x+30x-40)}{(3x^2-8x-2)^2}$$

Klammer auflösen :

$$f'(x)=\frac{6x^2-16x-4-12x^2+16x-30x+40}{(3x^2-8x-2)^2}$$

Ausdrücke sortieren ergibt die gesuchte Ableitung :

$$f'(x)=\frac{-6x^2-30x+36}{(3x^2-8x-2)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{-6x^2-30x+36}{\left(3x^2-8x-2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$-6x^2-30x+36=0$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit -1:

$$6x^2+30x-36=0$$

Wir lösen die Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4\cdot 6\cdot(-36)}}{2\cdot 6}=\frac{-30\pm 42}{12}$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=1 \text{ und } x=-6}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x)=\frac{2x+5}{3x^2-8x-2}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$3x^2-8x-2=0$$

Wir benutzen die "Lösungsformel für quadratische Gleichungen":

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{88}}{6}$$

$x_1\approx 2.897$
$x_2\approx -0.230$

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-6$ und $x=1$. Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir die beiden möglichen Pole in die Tabelle ein:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -6				
-6	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-6 bis -0.23				
-0.23	$---$	$---$	möglicher Pol	
-0.23 bis 1				
1	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
1 bis 2.897				
2.897	$---$	$---$	möglicher Pol	
2.897 bis ∞	unwichtig	unwichtig	unwichtig	

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-6$ bzw. $x=1$ um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die Stellen $x=-10$, $x=-1$, $x=0$ und $x=2$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x)=\frac{-6x^2-30x+36}{\left(3x^2-8x-2\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-10$:

$$f'(-10)=\frac{-6\cdot(-10)^2-30\cdot(-10)+36}{\left(3\cdot(-10)^2-8\cdot(-10)-2\right)^2}=\frac{-264}{142884}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$:

$$f'(-1)=\frac{-6\cdot(-1)^2-30\cdot(-1)+36}{\left(3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-2\right)^2}=\frac{60}{81}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$:

$$f'(0)=\frac{-6\cdot 0^2-30\cdot 0+36}{\left(3\cdot 0^2-8\cdot 0-2\right)^2}=\frac{36}{4}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$:

$$f'(2)=\frac{-6\cdot 2^2-30\cdot 2+36}{\left(3\cdot 2^2-8\cdot 2-2\right)^2}=\frac{-24-60+36}{36}=\frac{-48}{36}<0$$

Anmerkung für Profis:
Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen! Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -6	-10	negativ	fällt	
-6	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Minimum
-6 bis -0.23	-1	positiv	steigt	
-0.23	$---$	$---$	möglicher Pol	
-0.23 bis 1	0	positiv	steigt	
1	$---$	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Maximum
1 bis 2.897	2	negativ	fällt	
2.897	$---$	$---$	möglicher Pol	
2.897 bis ∞	unwichtig	unwichtig	unwichtig	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:
Weil die Funktion vor der Stelle $x=-6$ fällt und nach ihr steigt, hat sie bei $\boxed{x=-6 \text{ ein Minimum}}$.
Weil die Funktion vor der Stelle $x=1$ steigt und nach ihr fällt, hat sie bei $\boxed{x=1 \text{ ein Maximum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -6$ *ein Minimum*

$x = +1$ *ein Maximum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die

x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{2x+5}{3x^2-8x-2}$

$$f(-6) = \frac{2\cdot(-6)+5}{3\cdot(-6)^2-8\cdot(-6)-2} = \boxed{-\frac{7}{154}} \approx 0.0454545$$

$$f(1) = \frac{2\cdot 1+5}{3\cdot 1^2-8\cdot 1-2} = -\frac{7}{7} = \boxed{-1}$$

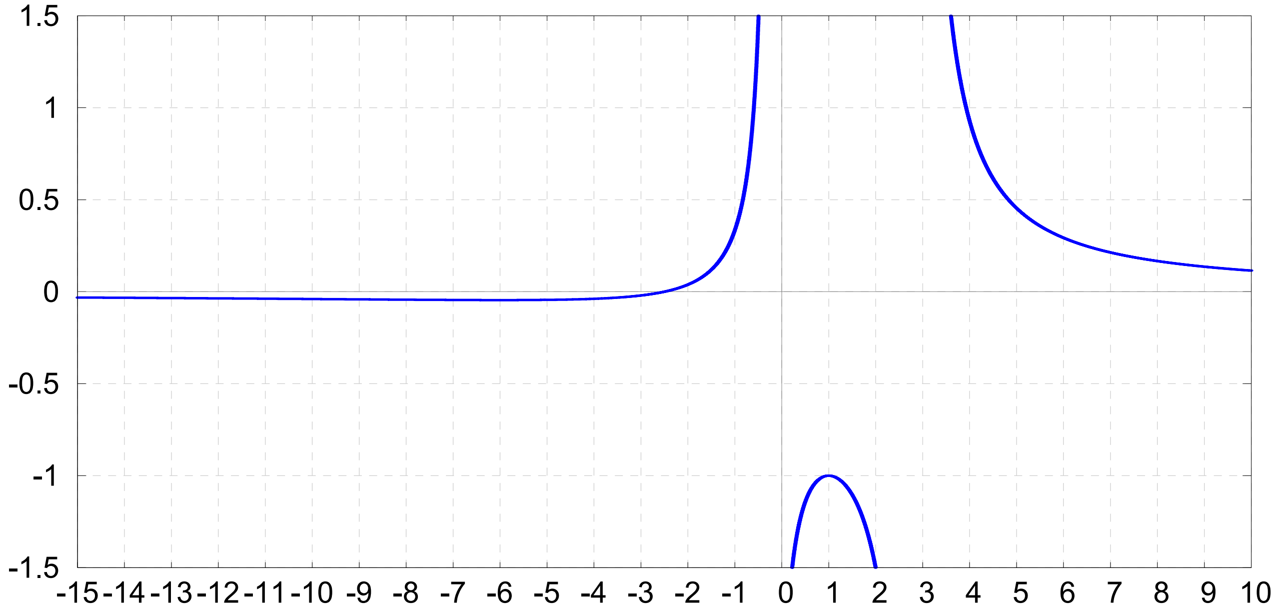
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-6 \,/ -\dfrac{7}{154}\right)$ *ist ein Minimum*

$(1\,/-1)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Lösung zu 1h

Gegeben: $f(x)=\dfrac{3x^2+6x-1}{x^2-2x+2}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{3x^2+6x-1}{x^2-2x+2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2+6x-1\right)\cdot\left(x^2-2x+2\right)-\left(3x^2+6x-1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Um $\left(3x^2+6x-1\right)$ *bzw.* $\left(x^2-2x+2\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{(6x+6)\cdot\left(x^2-2x+2\right)-\left(3x^2+6x-1\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Die Klammern im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{6x^3-12x^2+12x+6x^2-12x+12-\left[6x^3-6x^2+12x^2-12x-2x+2\right]}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Eckige Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der eckigen Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{6x^3-12x^2+12x+6x^2-12x+12-6x^3+6x^2-12x^2+12x+2x-2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{-12x^2+14x+10}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{-12x^2+14x+10}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$-12x^2+14x+10=0$$

Wir lösen die Gleichung mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot(-12)\cdot 10}}{2\cdot(-12)}=\frac{-14\pm 26}{-24}$$

Wir kürzen die beiden Brüche, und erhalten:

$$x_1=\frac{-14+26}{-24}=\frac{12}{-24}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-14-26}{-24}=\frac{-40}{-24}=\frac{5}{3}$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ und } x=\frac{5}{3}}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen". Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 - 2x + 2}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen. Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Wir benutzen die "Lösungsformel für quadratische Gleichungen":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

An dieser Stelle können wir die Rechnung vorzeitig abbrechen: Die Wurzel ist (in der Menge der reellen Zahlen) nicht definiert, da der Radikand negativ ist. Somit ist die Gleichung nicht lösbar, d.h. der Nenner der Funktion $f(x)$ kann nicht Null werden und daher hat die Funktion $f(x)$ auch keine Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-\frac{1}{2}$ *und* $x=\frac{5}{3}$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, soweit zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
$-\frac{1}{2}$ bis $\frac{5}{3}$				
$\frac{5}{3}$	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
$\frac{5}{3}$ bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-\frac{1}{2}$ *bzw.* $x=\frac{5}{3}$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*
Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.b. die drei Stellen $x=-1$, $x=0$ *und* $x=2$:

Erste Ableitung:
$$\boxed{f'(x)=\frac{-12x^2+14x+10}{\left(x^2-2x+2\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$:
$$f'(-1)=\frac{-12\cdot(-1)^2+14\cdot(-1)+10}{\left((-1)^2-2\cdot(-1)+2\right)^2}=\frac{-16}{25}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$:
$$f'(0)=\frac{-12\cdot 0^2+14\cdot 0+10}{\left(0^2-2\cdot 0+2\right)^2}=\frac{10}{4}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$:
$$f'(2)=\frac{-12\cdot 2^2+14\cdot 2+10}{\left(2^2-2\cdot 2+2\right)^2}=\frac{-10}{4}<0$$

Anmerkung für Profis:
Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen!
Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$	-1	*negativ*	*fällt*	
$-\frac{1}{2}$	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Minimum
$-\frac{1}{2}$ bis $\frac{5}{3}$	0	*positiv*	*steigt*	
$\frac{5}{3}$	$---$	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ Maximum
$\frac{5}{3}$ bis ∞	2	*negativ*	*fällt*	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

Weil die Funktion vor der Stelle $x=-\frac{1}{2}$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-\frac{1}{2}\text{ ein Minimum}}$.

Weil die Funktion vor der Stelle $x=\frac{5}{3}$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x=\frac{5}{3}\text{ ein Maximum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -\frac{1}{2}$ *ein Minimum*

$x = \frac{5}{3}$ *ein Maximum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{\frac{3}{4} - 3 - 1}{\frac{1}{4} + 1 + 2} = \frac{-\frac{13}{4}}{\frac{13}{4}} = \boxed{-1}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 2} = \frac{3 \cdot \frac{25}{9} + \frac{30}{3} - 1}{\frac{25}{9} - \frac{10}{3} + 2} = \frac{\frac{156}{9}}{\frac{13}{9}} = \boxed{12}$$

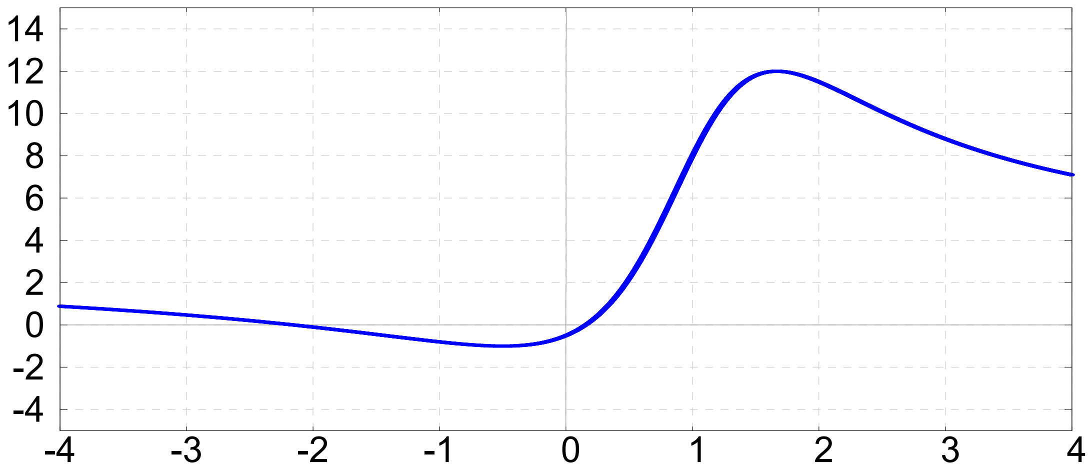
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$\left(-\frac{1}{2} \;/\; -1\right)$ *ist ein Minimum*

$\left(\frac{5}{3} \;/\; 12\right)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Lösung zu 1i

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+12x+16}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+12x+16}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{\left[n(x)\right]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)\cdot\left(x^2+12x+16\right)-x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+12x+16\right)}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Um $\left(x^2+12x+16\right)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+12x+16\right)-x\cdot(2x+12)}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Die Klammern im Zähler ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{x^2+12x+16-\left[2x^2+12x\right]}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Eckige Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der eckigen Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{x^2+12x+16-2x^2-12x}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$16-x^2=0$$

Wir lösen die Gleichung, indem wir die Gleichung nach x^2 auflösen:

$$16 = x^2$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel:

$$x=\pm 4$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-4}$ *und* $\boxed{x=4}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 12x + 16}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x^2 + 12x + 16 = 0$$

Wir benutzen die "Lösungsformel für quadratische Gleichungen":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{80}}{2}$$

$$x_1 = -6 + \frac{\sqrt{80}}{2} \approx -1.53$$

$$x_2 = -6 - \frac{\sqrt{80}}{2} \approx -10.47$$

Dies sind die beiden möglichen Pole.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-4$ *und* $x=4$*. Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, soweit zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir die beiden Pole ein, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -10.47				
-10.47	– – –	– – –	möglicher Pol	
-10.47 bis -4				
-4	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
-4 bis -1.53				
-1.53	– – –	– – –	möglicher Pol	
-1.53 bis 4				
4	– – –	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
4 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-4$ *bzw.* $x=4$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen. Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen* $-5,\ -2,\ 0$ *und* 5*:*

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x)=\frac{16-x^2}{\left(x^2+12x+16\right)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-5$*:*

$$f'(-5)=\frac{16-(-5)^2}{\left((-5)^2+12\cdot(-5)+16\right)^2}=\frac{-9}{361}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-2$*:*

$$f'(-2)=\frac{16-(-2)^2}{\left((-2)^2+12\cdot(-2)+16\right)^2}=\frac{12}{16}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$*:*

$$f'(0)=\frac{16-0^2}{\left(0^2+12\cdot 0+16\right)^2}=\frac{16}{256}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=5$*:*

$$f'(5)=\frac{16-5^2}{\left(5^2+12\cdot 5+16\right)^2}=\frac{-9}{10201}<0$$

Anmerkung für Profis:
Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen! Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -10.47	– – –	hier unwichtig	hier unwichtig	
-10.47	– – –	– – –	möglicher Pol	
-10.47 bis -4	-5	negativ	fällt	
-4	– – –	Null	horizontal	⇐ *Minimum*
-4 bis -1.53	-2	positiv	steigt	
-1.53	– – –	– – –	möglicher Pol	
-1.53 bis 4	0	positiv	steigt	
4	– – –	Null	horizontal	
4 bis ∞	5	negativ	fällt	⇐ *Maximum*

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:
Weil die Funktion vor der Stelle $x=-4$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-4 \text{ ein Minimum}}$.
Weil die Funktion vor der Stelle $x=4$ *steigt und nach ihr fällt, hat sie bei* $\boxed{x=4 \text{ ein Maximum}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten der Extrema berechnet :

$x = -4$ *ein Minimum*

$x = 4$ *ein Maximum*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 12x + 16}$

$$f(-4) = \frac{x}{(-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 16} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

$$f(4) = \frac{x}{4^2 + 12 \cdot 4 + 16} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = \boxed{0.05}$$

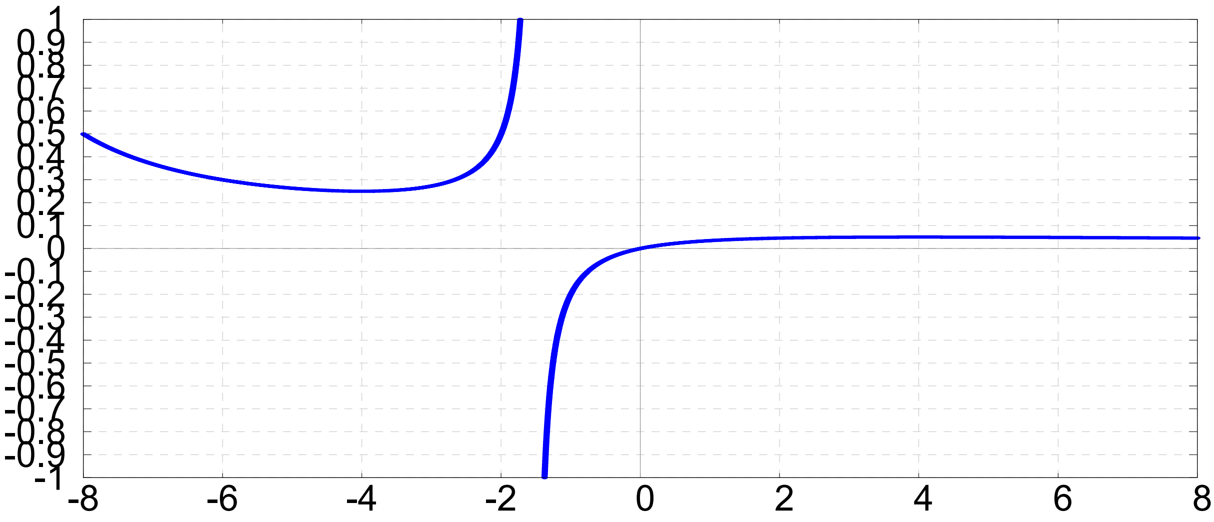
Ergebnis:

Die Extrema der Funktion haben folgende Koordinaten :

$(-4 \ / \ 0.25)$ *ist ein Minimum*

$(4 \ / \ 0.05)$ *ist ein Maximum*

Graph:



Hinweis:
Das x=4 ein Maximum ist, kann man am Graphen schwer erkennen, da die Funktion für x>4 nur sehr langsam fällt.

Lösung zu 1j

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\;-\;z(x)\cdot n'(x)}{\left[n(x)\right]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3-9x^2+27x-27\right)\cdot(x-1)-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)\cdot\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

Um $\left(x^3-9x^2+27x-27\right)$ bzw. $(x-1)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-18x+27\right)\cdot(x-1)-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

Das Ausmultiplizieren der Klammern ergibt :

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x^2-18x^2+18x+27x-27-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)}{(x-1)^2}$$

Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der Klammer
müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x^2-18x^2+18x+27x-27-x^3+9x^2-27x+27}{(x-1)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3-12x^2+18x}{(x-1)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3-12x^2+18x}{(x-1)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$2x^3-12x^2+18x=0$$

Wir klammern x aus und erhalten:

$$x\left(2x^2-12x+18\right)=0$$

Wir erhalten die erste Lösung $x=0$, wenn wir uns an den Satz erinnern:
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.
Die übrigen Lösungen ergeben sich, wenn man die Klammer mit Null gleichsetzt:

$$2x^2-12x+18=0$$

Wir lösen diese quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 2\cdot 18}}{2\cdot 2}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{4}=\frac{12}{4}=3$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=0}$ *und* $\boxed{x=3}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x)=\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x-1}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x-1=0$$

Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$$x=1$$

Dies ist ein möglicher Pol.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=0$ *und* $x=3$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen:*

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0				
0	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
0 bis 1				
1	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
1 bis 3				
3	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *zu untersuchende Stelle*
3 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=0$ *bzw.* $x=3$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen.*

Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.b. die vier Stellen $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ *und* $x=4$:

Erste Ableitung:
$$\boxed{f'(x)=\frac{2x^3-12x^2+18x}{(x-1)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$:
$$f'(-1)=\frac{2\cdot(-1)^3-12\cdot(-1)^2+18(-1)}{(-1-1)^2}=\frac{-32}{4}<0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=\frac{1}{2}$:
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+18\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{6.25}{0.25}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$:
$$f'(2)=\frac{2\cdot 2^3-12\cdot 2^2+18\cdot 2}{(2-1)^2}=\frac{4}{1}>0$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=4$:
$$f'(4)=\frac{2\cdot 4^3-12\cdot 4^2+18\cdot 4}{(4-1)^2}=\frac{8}{9}>0$$

> *Anmerkung für Profis:*
> *Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen! Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.*

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis 0	-1	*negativ*	*fällt*	
0	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *Minimum*
0 bis 1	$\frac{1}{2}$	*positiv*	*steigt*	
1	– – –	– – –	*möglicher Pol*	
1 bis 3	2	*positiv*	*steigt*	
3	– – –	*Null*	*horizontal*	$\Leftarrow$ *Sattelpunkt*
3 bis ∞	4	*positiv*	*steigt*	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=0$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=0 \text{ ein Minimum}}$.
2. *Weil die Funktion sowohl vor als auch nach der Stelle* $x=3$ *steigt, hat die Funktion bei* $\boxed{x=3 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet :

$x = 0$ *ein Minimum*

$x = 3$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 1}$

$$f(0) = \frac{0^3 - 9 \cdot 0^2 + 27 \cdot 0 - 27}{0 - 1} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 27}{3 - 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(0/27)$ *ist ein Minimum*

$(3/0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph:

Lösung zu 1k

Gegeben: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x+1}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot(x+1)-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

Um $\left(x^3-3x^2+3x-1\right)$ bzw. $(x+1)$ *zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :*

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-6x+3\right)\cdot(x+1)-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

Die beiden ersten Klammern ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+3x^2-6x^2-6x+3x+3-\left(x^3-3x^2+3x-1\right)}{(x+1)^2}$$

Klammer auflösen : Wegen dem Minus vor der Klammer müssen wir alle Vorzeichen in der Klammer umkehren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+3x^2-6x^2-6x+3x+3-x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird. Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$2x^3-6x+4=0$$

Wir teilen die Gleichung durch 2, wodurch kleinere Koeffizienten entstehen,

$$x^3-3x+2=0$$

Da man in der Schulmathematik die Lösungsformel für Gleichungen 3.Grades nicht lernt, müssen wir eine andere Methode versuchen, um diese Gleichung 3.Grades zu lösen. Wir erinnern uns an einen Satz aus der Algebra: ***"Falls eine ganzrationale Funktion ganzzahlige Lösungen hat, dann sind sie unter den Teilern des Absolutgliedes zu finden"****. Wir lösen die Gleichung also durch Probieren, indem wir die "Teiler des Absolutgliedes" (1,2,–1 und –2) der Reihe nach in die Gleichung einsetzen:*

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-2 \text{ und } x=1}$ *Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Da eine Gleichung 3.Grades aber aber drei Lösungen haben kann, müssen wir nach weiteren möglichen Lösungen suchen. Weil $x=1$ und $x=-2$ Lösungen sind, können wir $(x-1)\cdot(x+2)=(x^2+x-2)$ aus der Gleichung 3.Grades abspalten. Dazu teilen wir die Gleichung 3.Grades durch (x^2+x-2):

$$(x^3-3x+2):\overbrace{(x^2+x-2)}^{(x-1)\cdot(x+2)}=(x-1)$$

Die Gleichung 3.Grades kann man also schreiben als:

$$(x-1)(x-1)(x+2)=0$$

Nun können wir die Lösungen $x=1$ und $x=-2$ ablesen, indem wir den Lehrsatz benutzen: Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=-2}$ *und* $\boxed{x=1}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x + 1}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x + 1 = 0$$

Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$$x = -1$$

Dies ist ein möglicher Pol.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattepunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-2$ *und* $x=1$. *Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir den möglichen Pol in die Tabelle ein:*

x	Gewählte Stelle	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -2				
-2	− − −	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
-2 bis -1				
-1	− − −	− − −	möglicher Pol	
-1 bis 1				
1	− − −	Null	horizontal	⇐ zu untersuchende Stelle
1 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-2$ *bzw.* $x=1$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen. Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen* $x=-3$, $x=-1.5$, $x=0$ *und* $x=2$:

Erste Ableitung:

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x^3-6x+4}{(x+1)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-3$:

$$\boxed{f'(-3)=\frac{2\cdot(-3)^3-6\cdot(-3)+4}{(-3+1)^2}=\frac{-54+18+4}{4}=-8<0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-\frac{3}{2}$:

$$\boxed{f'\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+4}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2}=\frac{6.25}{0.25}=25>0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=0$:

$$\boxed{f'(0)=\frac{2\cdot 0^3-6\cdot 0+4}{(0+1)^2}=\frac{4}{1}>0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=2$:

$$\boxed{f'(2)=\frac{2\cdot 2^3-6\cdot 2+4}{(2+1)^2}=\frac{8}{9}>0}$$

> *Anmerkung für Profis:*
> *Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen! Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.*

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählte Stelle	1.Ableitung	Funktion
$-\infty$ bis -2	-3	negativ	fällt
-2	− − −	Null	horizontal
-2 bis -1	$-\frac{3}{2}$	positiv	steigt
-1	− − −	− − −	möglicher Pol
-1 bis 1	0	positiv	steigt
1	− − −	Null	horizontal
1 bis ∞	2	positiv	steigt

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=-2$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-2 \text{ ein Minimum}}$.
2. *Weil die Funktion sowohl vor der Stelle* $x=1$ als auch nach der Stelle x=1 *steigt*, *hat sie bei* $\boxed{x=1 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet :

$x = -2$ *ein Minimum*

$x = 1$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x + 1}$

$$f(-2) = \frac{(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2) - 1}{(-2) + 1} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(1) = \frac{1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

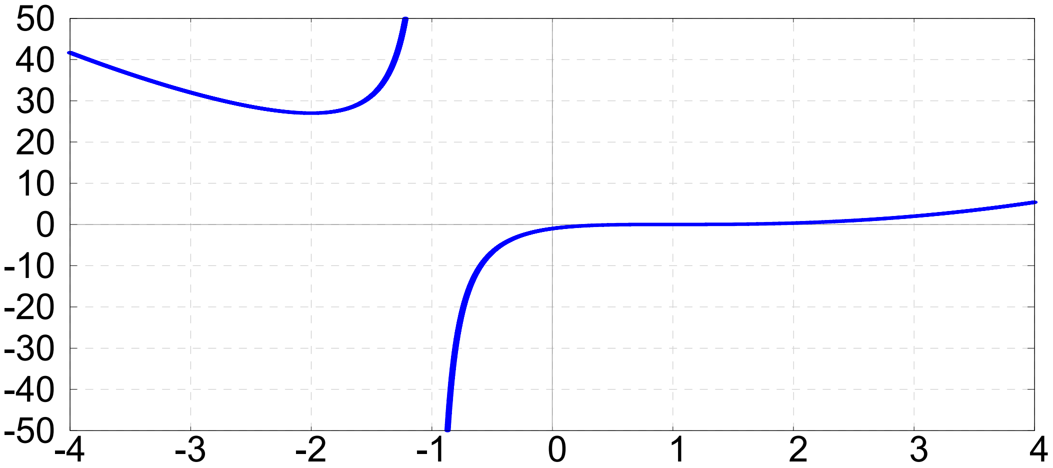
Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten :

$(-2 \;/\; 27)$ *ist ein Minimum*

$(1 \;/\; 0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph:



Lösung zu 1L

Gegeben: $f(x)=\frac{x^3}{x+2}$

Gesucht: *Lokale Extrema, Terassenpunkte*

1.Ableitung berechnen:

Gegeben ist die Funktion :

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

Wir wollen die 1.Ableitung bilden, und benutzen dazu die Quotientenregel :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)=\frac{z'(x)\cdot n(x)\ -\ z(x)\cdot n'(x)}{[n(x)]^2}$$

Es ergibt sich als 1.Ableitung :

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\cdot(x+2)-\left(x^3\right)\cdot\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2}$$

Um $(x+2)$ zu differenzieren, benutzen wir die Summenregel, und erhalten :

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+2)-\left(x^3\right)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

Die Klammer ausmultiplizieren :

$$f'(x)=\frac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}$$

Im Zähler die Ausdrücke sortieren und zusammenfassen :

$$f'(x)=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$$

Nullstellen der 1.Ableitung berechnen:

Um die Nullstellen der 1.Ableitung zu berechnen, müssen wir die 1.Ableitung, die wir auf der vorigen Seite berechnet haben, mit Null gleichsetzen:

$$\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}=0$$

Der Bruch wird Null, wenn der Zähler zu Null wird.
Wir müssen daher den Zähler gleich Null setzen:

$$2x^3+6x^2=0$$

Wir können x^2 ausklammern:

$$x^2(2x+6)=0$$

Nun benutzen wir den Satz: "Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist". Die erste Lösung können wir nun ablesen: Sie lautet $x=0$. Eine weitere Lösung findet man, wenn man die Klammer mit Null gleichsetzt:

$$2x+6=0$$

Wir subtrahieren 6 auf beiden Seiten:

$$2x=-6$$

Wir teilen die Gleichung durch 2:

$$x=\frac{-6}{2}=-3$$

Wir erhalten als Ergebnis, dass $\boxed{x=0}$ *und* $\boxed{x=-3}$ *die Nullstellen der 1.Ableitung sind.*

Definitionslücken berechnen:

Auf der nächsten Seite werden wir den "Verlauf der 1.Ableitung berechnen".
Da sich die Steigung einer Funktion (die 1.Ableitung) nicht nur an lokalen Extremstellen ändern kann, sondern auch an Polen, müssen wir die Pole der Funktion berechnen.

Die gegebene Funktion lautete:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

Pole können nur an den Nullstellen des Nenners entstehen.
Wir müssen daher den Nenner mit Null gleichsetzen:

$$x + 2 = 0$$

Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$$x = -2$$

Dies ist ein möglicher Pol.

Anmerkung:
Ob an den beiden Stellen wirklich ein Pol vorliegt, werden wir hier nicht genauer untersuchen, da ja in der Aufgabe nur Extrema und Sattelpunkte gesucht sind, aber nicht die Pole.

Verlauf der 1.Ableitung untersuchen:

Die Nullstellen der 1.Ableitung lauteten: $x=-3$ *und* $x=0.$
Wir tragen diese Nullstellen der 1.Ableitung in eine Tabelle ein, sowie zusätzlich die Intervalle vor und nach diesen Stellen. Außerdem tragen wir den möglichen Pol ein:

x	Gewählt	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3				
-3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
-3 bis -2				
-2	– – –	– – –	möglicher Pol	
-2 bis 0				
0	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ zu untersuchende Stelle
0 bis ∞				

Um zu berechnen, ob es sich bei $x=-3$ *bzw.* $x=0$ *um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, müssen wir untersuchen, ob die Funktion in den Intervallen vor bzw. nach diesen Stellen steigt oder fällt, indem wir die 1. Ableitung in diesen Intervallen untersuchen. Dazu wählen wir aus jedem Intervall eine Stelle, z.B. die vier Stellen* $x=-4$, $x=-2.5$, $x=-1$ *und* $x=1$:

Erste Ableitung: $$\boxed{f'(x)=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-4$: $$\boxed{f'(-4)=\frac{2\cdot(-4)^3+6\cdot(-4)^2}{(-4+2)^2}=\frac{-32}{4}<0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-2.5$: $$\boxed{f'(-2.5)=\frac{2\cdot(-2.5)^3+6\cdot(-2.5)^2}{(-2.5+2)^2}=\frac{6.25}{0.25}=24>0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=-1$: $$\boxed{f'(-1)=\frac{2\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2}{(-1+2)^2}=\frac{4}{1}>0}$$

Erste Ableitung an der Stelle $x=1$: $$\boxed{f'(1)=\frac{2\cdot 1^3+6\cdot 1^2}{(1+2)^2}=\frac{8}{9}>0}$$

Anmerkung für Profis:
Da der Nenner stets positiv ist (durch das Quadratzeichen) hätten wir ihn eigentlich nicht berechnen müssen!
Das Vorzeichen der ersten Ableitung wäre nämlich dadurch identisch mit dem Vorzeichen des Zählers.

Da wir nun in allen Intervallen die Steigung (1.Ableitung) kennen, können wir in die Tabelle eintragen, ob die Funktion in den Intervallen steigt oder fällt:

x	Gewählte Stelle	1.Ableitung	Funktion	
$-\infty$ bis -3	-3	negativ	fällt	
-3	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Minimum
-3 bis -2	-2.5	positiv	steigt	
-2	– – –	– – –	möglicher Pol	
-2 bis 0	-1	positiv	steigt	
0	– – –	Null	horizontal	$\Leftarrow$ Sattelpunkt
0 bis ∞	1	positiv	steigt	

Nun können wir ablesen, welche Punkte Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind:

1. *Weil die Funktion vor der Stelle* $x=-3$ *fällt und nach ihr steigt, hat sie bei* $\boxed{x=-3 \text{ ein Minimum}}$.
2. *Weil die Funktion* sowohl *vor der Stelle* $x=0$ als auch nach dieser Stelle *steigt, hat sie bei* $\boxed{x=0 \text{ einen Sattelpunkt}}$.

y-Koordinaten der Extrema berechnen:

Wir haben bereits x - Koordinaten des Extremums bzw. Sattelpunktes berechnet:

$x = -3$ *ein Minimum*

$x = 0$ *ein Sattelpunkt*

Um die y - Koordinaten der Extrema zu berechnen, setzen wir die x - Koordinaten in die gegebene Gleichung ein, welche lautete: $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{-3+2} = \frac{-27}{-1} = \boxed{27}$$

$$f(0) = \frac{0^3}{0+2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Ergebnis:

Das Extremum bzw. der Sattelpunkt der Funktion hat folgende Koordinaten:

$(-3/27)$ *ist ein Minimum*

$(0/0)$ *ist ein Sattelpunkt*

Graph: