

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folgen</b>	<b>2</b>
1.3 Spezielle Folgen . . . . .	2
1.4 Grenzwert * . . . . .	3
1.5 Grenzwertsätze * . . . . .	5

# Kapitel 1

## Folgen

Wir wollen uns in diesem Teil "Folgen II" mit schweren Themen beschäftigen. So sind die Kapitel, die sich hauptsächlich mit Themen beschäftigen, die in der Oberstufe oder im Studium gelehrt werden, wiederum mit einem \* gekennzeichnet.

Dies bedeutet, dass jeder, der sich nur ein bisschen zur Wiederholung mit Folgen beschäftigen möchte, diese Kapitel zunächst einmal auslassen kann, später aber unbedingt nachholen sollte.

Der Begriff des Grenzwertes und der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge ist äusserst wichtig für die Analysis, auch wenn man es nach Schulunterricht nicht erraten kann. Der Begriff des Grenzwertes macht erst alle weiteren Definitionen wie *Stetigkeit*, *Differenzierbarkeit*, ... erst möglich, dies sind die zentralen Begriffe, mit denen man sich insbesondere in der Schulmathematik beschäftigt.

Wir werden in diesem Skript versuchen den Begriff "Grenzwert" so verständlich wie möglich zu vermitteln und auch die wichtigsten Zusammenhänge aufzuzeigen.

### 1.3 Spezielle Folgen

**Definition 1.3.1.** Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heisst **arithmetisch**, wenn es reelle Zahlen  $b$  und  $c$  gibt, so dass

$$a_n = b + (n - 1)c$$

für alle  $n$ . Dies hat einen engen Zusammenhang mit der rekursiven Definition einer Zahlenfolge, denn es ergibt sich somit für die Folgenglieder:

$$a_1 = b; a_2 = b + c; a_3 = b + 2c \dots$$

Wir betrachten hierzu zunächst ein Beispiel

**Beispiel 1.3.2.** Es sei  $a_n = 4 + n$ , bestimmen Sie laut Definition  $b$  und  $c$ .

Es ist sicherlich etwas kompliziert gemacht, aber so kann man am einfachsten die Umformungen sehen. Es ist

$$a_n = 4 + (n - 1) + 1 = 5 + (n - 1)$$

also  $b = 5$  und  $c = 1$ .

**Bemerkung 1.** Normalerweise definiert man: Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heisst arithmetisch, falls es eine reelle Zahl  $b$  gibt, so dass

$$a_{n+1} - a_n = b$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder also konstant ist.

Nachdem wir nun Folgen in Zusammenhang mit Addition definiert haben, wollen wir uns solchen mit Multiplikation widmen.

**Definition 1.3.3.** Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heisst **geometrisch**, wenn es von 0 verschiedene reelle Zahlen  $a$  und  $g$  gibt, so dass

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

**Beispiel 1.3.4.** Die häufigste Anwendung für geometrische Folgen findet man in der Bank bei der Kapitalverzinsung. Verzinst man ein Kapital  $K$  mit einem jährlichen Prozentsatz von  $p$ , so ergibt sich nach einem Jahr

$$K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Lässt man nun dieses neue Kapital auf dem Konto liegen so ergibt sich nach 2 Jahren ein Guthaben von

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

oder allgemein nach  $n$  Jahren

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Dies ist als eine geometrische Folge mit  $a = K$  und  $g = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

**Bemerkung 2.** Ebenso wie bei den arithmetischen Folgen finden wir auch hier wieder eine äquivalente Definition. Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heisst geometrisch, wenn es eine reelle Zahl  $g$  gibt, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = g$$

Die Gleichheit der beiden Aussagen liegt auf der Hand, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ag^n}{ag^{n-1}} = g$$

Wir haben somit gezeigt, dass wenn  $(a_n)$  eine geometrische Folge ist, die obige Behauptung gilt. Bleibt noch zu zeigen, dass, wenn die obige Behauptung gilt, die Folge geometrisch ist. Dies wollen wir dem Leser als Übung überlassen.

Wir wollen zuletzt noch eine wichtige Klasse von reellen Zahlenfolgen kennenlernen. Die Bedeutung ist nicht sofort ersichtlich und wird auch erst im Kurs Reihenwirklich bedeutend werden.

**Definition 1.3.5.** Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)$  heisst **alternierend**, wenn das Vorzeichen der Folgenglieder alterniert, also das Vorzeichen wechselt.

**Beispiel 1.3.6.** Das bekannteste Beispiel hierfür ist  $a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$

## 1.4 Grenzwert \*

Wir wollen uns nun dem Begriff des Grenzwertes zuwenden, daher wollen wir uns zunächst einmal überlegen, was wir darunter verstehen wollen, dass sich eine Folge, immer mehr einem Wert annähert und wie wir das mathematisch formulieren wollen.

Hierzu müssen wir uns zunächst aber einigen vorbereitenden Sachverhalten zuwenden

**Definition 1.4.1.** Eine  $\epsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x$ ,  $U_\epsilon(x)$ , sind alle Punkte von  $x$  die höchstens einen Abstand von  $\epsilon$  haben. Mathematisch ausgedrückt sind das alle Punkte  $y$ , für die gilt:

$$|y - x| < \epsilon$$

Dies klingt vielleicht derzeit noch sehr kompliziert, aber wenn wir einige Beispiele betrachtet haben, wird sofort klar, was eine  $\epsilon$ -Umgebung eines Punktes ist.

**Beispiel 1.4.2.**

1. Eine 2-Umgebung von 3 sind alle Punkte  $y$ , für die gilt

$$|y - 3| < 2$$

oder einfacher gesagt, alle Punkte aus dem offenen Intervall  $(1,5)$ , um dies einzusehen, wollen wir noch einmal kurz die Auflösung von Betragsungleichungen wiederholen/verdeutlichen.

Lösen wir  $|y - 3| < 2$  auf, so erhalten wir

$$|y - 3| = \begin{cases} y - 3 & y \geq 3 \\ -y + 3 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$|y - 3| < 2 \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow y - 3 < 2 \quad \text{oder} \quad -y + 3 < 2 \quad (1.3)$$

$$\Leftrightarrow y < 5 \quad \text{oder} \quad -y < -1 \quad (1.4)$$

$$\Leftrightarrow y < 5 \quad \text{oder} \quad y > 1 \quad (1.5)$$

$$\Leftrightarrow 1 < y < 5 \quad (1.6)$$

Hierbei müssen wir besonders bei der Umformung von (1.4)  $\Rightarrow$  (1.5) die regeln für das Rechnen mit Ungleichungen beachten. Einfach gesagt, dreht sich das ungleichheitszeichen bei Multiplikation mit einer negativen Zahl um.

2. Eine 1-Umgebung um  $a$  sind alle Punkte  $y$ , für die gilt

$$|y - a| < 2$$

also alle Punkte  $y$  aus dem offenen Intervall  $(a-2,2+a)$ .

3. Eine  $\epsilon$ -Umgebung um den Punkt  $a$  sind demnach alle Punkte  $y$ , für die gilt

$$|y - a| < \epsilon$$

also alle Punkte  $y$  aus dem offenen Intervall  $(a-\epsilon,\epsilon+a)$

Wenn wir nun überlegen, wie wir "nahe beieinanderliegen" definieren wollen, so liefert dieser Umgebungsbegriff eines der ntigen Mittel.

Überlegen wir nun weiter, dass wir umgangssprachlich gesagt haben, dass eine Folge  $(a_n)$  gegen eine Zahl  $a$  strebt, wenn sie sich die Folgenglieder der Zahl  $a$  immer mehr annähern, so erscheint es sinnvoll, zu verlangen, dass wir so nahe wie auch an  $a$  herangehen, wir doch immer eine natürliche Zahl  $m$  finden, so dass alle Folgenglieder ab  $a_m$  ganz nahe bei  $a$  liegen. Der Sinn hierbei ist, dass es nicht genügt, dass wir verlangen, dass viele Folgenglieder in der Nähe von  $a$  liegen, sondern, dass fast alle Folgenglieder<sup>1</sup> in der Nähe von  $a$  liegen, sonst könnte es ja sein, dass zwar die ersten 100.000 Folgenglieder von  $a_n$  sich  $a$  annähern, die weiteren aber gegen  $\infty$  streben.

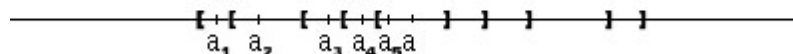


Abbildung 1.1: Konvergenz einer Zahlenfolge

Nun wollen wir uns der mathematischen Definition des Grenzwertes zuwenden

**Definition 1.4.3.** Sei  $(a_n)$  eine reelle Zahlenfolge  $a$  eine reelle Zahl, dann heisst  $(a_n)$  **konvergent** mit Grenzwert  $a$ , genau dann wenn gilt:

Für jedes (beliebig kleine)  $\epsilon > 0$  gibt es einen Index  $m$ , so dass gilt

$$a_n \in U_\epsilon(a) \text{ für alle } n \geq m$$

<sup>1</sup>Der Begriff "fast alle" ist ein wenig irreführend, er meint, dass bis auf endlich viele Folgenglieder alle in der Nähe von  $a$  liegen. Natürlich erscheinen 10 Milliarden Folgenglieder, die nicht in der Nähe von  $a$  liegen, unheimlich viel, dennoch sind sie gegenüber unendlich vielen Folgengliedern vernachlässigbar wenige

bzw.

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq m$$

Man schreibt hierzu

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

teilweise auch nur

$$a_n \rightarrow a$$

da der Zusatz "für  $n \rightarrow \infty$ " klar ist.

Ausserdem schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder kürzer } \lim a_n = a$$

**Bemerkung 3.** Eine Zahlenfolge, die nicht konvergent ist, wird auch divergent genannt.

Diese Definition spiegelt genau das wieder, was wir zuvor entwickelt haben.

Nun stellt es sich sicherlich als sehr beschwerlich heraus, für jedes beliebige  $\epsilon > 0$ , wie es die Definition verlangt, nachzuweisen, dass es solch einen Index gibt.

Darum wollen wir uns nun mit weiteren Methoden beschäftigen, die Konvergenz einer Zahlenfolge feststellen zu können.

## 1.5 Grenzwertsätze \*

**Satz 1.5.1.** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge  $\Rightarrow a_n$  ist beschränkt.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $a = \lim a_n$ , den Grenzwert der Zahlenfolge. Zu  $\epsilon = 1$  existiert wegen der Konvergenz von  $a_n$  ein Index, so dass für alle  $n \geq m$  gilt:

$$|a_n - a| < 1 \tag{1.7}$$

$$|a_n - a| = \begin{cases} a_n - a & a_n \geq a \\ -a_n + a & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$|a_n - a| < 1 \Rightarrow \begin{cases} a_n - a < 1 & a_n \geq a \\ -a_n + a < 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n < 1 + a & a_n \geq a \\ -a_n < 1 - a & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n < 1 + a & a_n \geq a \\ a_n > -1 + a & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow a - 1 < a_n < a + 1 \tag{1.12}$$

Wobei man wiederum bei der Umformung (1.10)  $\Rightarrow$  (1.11) die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen beachten muss.

Sei nun  $c := \min\{a-1, a_1, \dots, a_m\}$  und  $C := \max\{a+1, a_1, \dots, a_m\}$  so folgt

$$c \leq a_n \leq C \quad \text{für jedes } n \tag{1.13}$$

Wir betrachten zur Verdeutlichung noch die Ungleichung

$$c \leq a_n$$

die zweite überlassen wir dem Leser.

$c$  ist nach Definition als Minimum kleiner oder gleich der Folgenglieder  $a_1$  bis  $a_m$ , nun gilt aber weiter

$$c \leq a - 1$$

und nach (1.12)

$$a - 1 \leq a_n \quad \text{für } n \geq m$$

und somit zusammen

$$c \leq a_n \quad \text{für } n \geq m$$

also insgesamt ist  $c$  kleiner oder gleich als die ersten  $m$  Folgenglieder und auch kleiner oder gleich als die folgenden, also folgt die Behauptung  $\square$

Wir wollen nun einen vorbereitenden Satz über Beträge beweisen

**Satz 1.5.2 (Dreiecksungleichung).** *Sind  $x$  und  $y$  zwei reelle Zahlen, so gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

*Beweis.* Der Beweis unterteilt sich in zwei Teile

1. Teil:  $x+y \geq 0$ :

Sicherlich gilt  $x \leq |x|$  und  $y \leq |y|$ . Nach den Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgt somit

$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y| \quad (1.14)$$

2. Teil:  $x+y < 0$ :

In diesem Fall ist  $|x + y| = -(x+y) = -x-y$ . Wiederum ist  $-x \leq |-x|$  und  $-y \leq |-y|$ , also folgt

$$-x - y \leq |-x| + (-y) \leq |-x| + |-y| \quad (1.15)$$

Betrachten wir nun  $|-2| = |2| = 2$ , so liefert dies uns den Hinweis, dass allgemein  $|x| = |-x|$  gilt, somit folgt

$$-x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y| \quad (1.16)$$

Also folgt, wenn wir beide Fälle zusammenfügen

$$|x + y| = \begin{cases} x + y & x + y \geq 0 \\ -x - y & \text{sonst} \end{cases} \leq |x| + |y| \quad (1.17)$$

$$|x + y| = \leq |x| + |y| \quad (1.18)$$

$\square$

Nun können wir uns einem weiteren Satz zuwenden.

**Satz 1.5.3 (Summensatz).** *Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Zahlenfolge mit  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ , dann gilt: Die Summenfolge  $(a_n + b_n)$  ist konvergent mit  $\lim(a_n + b_n) = a + b$*

*Beweis.* Da  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen sind, finden wir Indizes  $n_1$  und  $n_2$ , so dass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für } n \geq n_1 \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für } n \geq n_2 \quad (1.19)$$

dann gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n + b_n - a - b| \quad (1.20)$$

$$= |(a_n - a) + (b_n - b)| \quad (1.21)$$

wenden wir nun die Dreiecksungleichung mit den beiden Ausdrücken in den Klammern an, so ergibt sich

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \quad (1.22)$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (1.23)$$

Wählen wir aber nun  $m := \max\{n_1, n_2\}$ , so können wir mit Hilfe der Gleichung (1.19) die beiden Summanden abschätzen

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (1.24)$$

Wir haben also insgesamt für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  gezeigt, dass

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \epsilon \quad \text{für } n \geq m \quad (1.25)$$

also ist die Summenfolge konvergent mit Grenzwert  $(a+b)$   $\square$