Inhaltsverzeichnis

1 Folgen **2**
1.6 Weitere Grenzwertsätze * 2
1.7 Cauchy-Folgen 4

Kapitel 1

Folgen

1.6 Weitere Grenzwertsätze *

Wir haben im letzten Teil “Folgen 2“ zuletzt den Summensatz besprochen. Nun stellt sich als nächstes die Frage ob sich das kkonvergenzverhalten bei Produkten und Quotienten ändert?! Der Grund, warum wir dies nicht noch im letzten Teil behandelt haben, liegt in der Schwierigkeit der Beweise, sie sind technisch zwar sehr einfach zu verstehen, dennoch sind zumeist die Beweisideen ziemlich schwer, so dass sich dieses Skript von den Beweisen her, hauptsächlich für Studenten eignet. Die Sätze sind allerdings derart wichtig, dass man sie zumindest gesehen haben sollte.

Satz 1.6.1 (Produktsatz). *Seien* (a_n) *und* (b_n) *Zahlenfolge und lim* $a_n = a$, *lim* $b_n = b$, *dann gilt: Die Produktfolge* $(a_n \cdot b_n)$ *ist konvergent mit lim* $(a_n \cdot b_n) = a{\cdot}b$

Beweis. Sei C:=max{—b—,a$_n$}. Dieses Maximum existiert tatschlich, da a$_n$ konvergent ist, muss die Folge beschränkt sein, wie wir schon gesehen haben. Da nun weiter a$_n$ konvergent ist, können wir einen Index m so wählen, dass

$$|a_n - a| < \frac{e}{2C} \; und \; |b_n - b| < \frac{e}{2C} \; für \; alle \; n \geq m$$

Betrachten wir nun die Produktfolge d$_n$:= a$_n b_n$, dann ist

$$|d_n - ab| = |a_n b_n - ab| \tag{1.1}$$

Durch geschicktes Erweitern können wir nun folgende Form erreichen

$$\begin{aligned} |a_n b_n + 0 - ab| &= |a_n b_n + (-a_n b + a_n b) - ab| && (1.2) \\ &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| && (1.3) \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Dreiecksungleichung (die uns aus “Folgen 2“ bekannt ist) an, so erhalten wir

$$|a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \tag{1.4}$$

Wir wissen nun aber auch weiter, dass für zwei reelle Zahlen x und y gilt

$$|x \cdot y|| = |x||y|^1$$

Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| &= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| && (1.5) \\ &\leq C|b_n - b| + |a_n - a|C && (1.6) \\ &< C(\frac{e}{2C}) + C(\frac{e}{2C}) && (1.7) \\ &= \frac{e}{2} + \frac{e}{2} && (1.8) \\ &= e && (1.9) \end{aligned}$$

[1]notfalls rechne man es nach, wie wir es schon in “Folgen 2’mit der Dreiecksungleichung volzogen haben

□

Satz 1.6.2 (Quotientensatz). *Seien (a_n) und (b_n) Zahlenfolge und lim $a_n = a$, lim $b_n = b$, dann gilt: Ist b≠0 dann gibt es einen Index m mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq m$ und die Quotientenfolge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert mit lim $(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$*

Beweis. Behauptung: $\frac{1}{b_n}$ konvergiert gegen $\frac{1}{b}$, die Behauptung des Satzes folgt dann mit dem Produktsatz Sei jetzt der Index n_1 so gewählt, dass gilt:

$$|b_n - b| < |b|^2 \frac{e}{2} \tag{1.10}$$

und auch auf grund der Konvergenz von (b_n) für e $= \frac{|b|}{2}$

$$|b - b_n| < \frac{|b|}{2} \tag{1.11}$$

Nun wir wissen wir auch weiter

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| \tag{1.12}$$

$$|b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \tag{1.13}$$

$$\frac{|b|}{2} < |b_n| \tag{1.14}$$

Dies ist möglich, da die Folge b_n konvergent ist. Damit haben wir gezeigt, dass einen Index gibt, so dass

$$0 \leq \frac{|b|}{2} \tag{1.15}$$

$$< |b_n| \tag{1.16}$$

für alle n≥m. Es folgt

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{b_n b}| \tag{1.17}$$

Ersetzen wir nun im Nenner nach (1.14) $|b_n|$, so folgt

$$|\frac{b - b_n}{b_n b}| \leq \frac{2}{|b^2|}|b_n - b| \tag{1.18}$$

ersetzen wir nun weiter mit (1.10)

$$\frac{2}{|b^2|}|b_n - b| < \frac{2}{|b^2|}|b|^2 \frac{e}{2} \tag{1.19}$$

$$= e \tag{1.20}$$

Also folgt insgesamt

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < e \tag{1.21}$$

Also ist $\frac{1}{b_n}$ konvergent gegen $\frac{1}{b}$. □

Satz 1.6.3 (Vergleichssatz). *Seien a_n und b_n zwei konvergente reelle Zahlenfolgen mit lim $a_n = a$ und lim $b_n = b$, weiter gebe es einen Index m so dass*

$$a_n \leq b_n \qquad \textit{für alle } n \geq m$$

dann gilt auch

$$a \leq b$$

Satz 1.6.4 (Einschnürungssatz). *Seien a_n und b_n zwei konvergente Zahlenfolgen, die beide gegen eine reelle Zahl a konvergieren, weiterhin gebe es einen Index m, so dass*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad \textit{für alle } n \geq m$$

dann ist auch c_n konvergent gegen a

Beweis. Wir wollen an dieser Stelle diesen beweis dem leser überlassen, da dies eine gute Möglichkeit darstellt, das rechnen mit Beträgen und Ungleichungen zu üben, dies ist das wichtigste Handwerkszeug im Umgang mit Folgen. □

Wir haben uns nun lange mit verschiedenen Bedingungen für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge beschäftigt und auch verschiedene Methoden kennengelernt! Allerdings haben wir die ganze Zeit eine Vorrausetzung getroffen, die als selbstverständlich erscheint:

Jede Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert

Wer sagt schliesslich, dass es nicht einen weiteren Grenzwert[2] geben kann, diese Möglichkeit wollen wir nun im folgendem Satz untersuchen.

Satz 1.6.5 (Eindeutigkeit des Grenzwertes). *Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge mit lim $a_n = a$ und lim $b_n = b \Rightarrow a = b$*

Beweis. Annahme: a≠b

Sei $\epsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$, dann gibt es n_1 und n_2, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \; \forall n \geq n_1 \qquad |a_n - b| < \epsilon \; \forall n \geq n_2$$

Mit $n_0 = \min\{n_1; n_2\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|a-b| &= |a - a_n + a_n - b| && (1.22)\\
&\leq |a - a_n| + |a_n - b| && (1.23)\\
&< \epsilon + \epsilon && (1.24)\\
&= 2\epsilon && (1.25)\\
&= |b-a| && (1.26)
\end{aligned}$$

Widerspruch! □

1.7 Cauchy-Folgen

Definition 1.7.1. *Eine Folge $(a_n)_n$ heisst Cauchy-Folge, wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0$, so dass:*

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

$\forall n, m \geq n_0$

[2] Dem Phänomen, dass eine Folge praktisch zwei Grenzwerte hat, vielmehr es zwei oder mehrere Werte gibt, die immer wieder angenommen werden, nennt man Häufungspunkt. Häufungspunkte wollen wir später noch betrachten

Satz 1.7.2. *Jede Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. $\Rightarrow$:

Sei n_0 so gewählt, dass $|a_n - a| < \epsilon \; \forall$ n$\geq n_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| && (1.27)\\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| && (1.28)\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n, m \geq n_0 && (1.29) \end{aligned}$$

also ist a_n eine Cauchy-Folge

$\Leftarrow$:

Axiom □

Definition 1.7.3. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge und sei $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge naturerlicher Zahlen. Dann bezeichnet man die Folge*

$$(a_{n_k})_k = a_{n_1}; a_{n_2}; \ldots$$

als Teilfolge der Folge $(a_n)_n$ und schreibt

$$(a_{n_k})_k \subset (a_n)_n$$

Definition 1.7.4. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst Haeufungspunkt der Folge $(a_n)_n$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k \subset (a_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$ gibt.*

Satz 1.7.5 (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschraenkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Haeufungspunkt in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir konstruieren induktiv Intervalle in denen unendlich viele Folgenglieder liegen, so konstruieren wir eine Intervalhalbierung Die Länge der Intervalle konvergiert gegen 0, also verschwindet zu einem Punkt. □

Satz 1.7.6. *Eine beschraenkte Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ ist konvergent genau dann, wenn sie nur einen Haeufungspunkt hat.*

Beweis. $\Rightarrow$:

a_n konvergiere gegen a , somit ist a Häufungspunkt. Annahme b$\neq$a ist weiterer Häufungspunkt
Sei $\epsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$, sei n_0 so geählt dass folgendes gilt

$$|a_n - a| < \epsilon$$

$$|a_{n_k} - b| < \epsilon$$

Die Teilfolge a_{n_k} erfüllt also beide obigen Gleichungen es folgt somit:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - a_{nk} + a_{nk} - b| && (1.30)\\ &\leq |a - a_{nk}| + |a_{nk} - b| && (1.31)\\ &< 2\epsilon && (1.32)\\ &= |b - a| && (1.33) \end{aligned}$$

Widerspruch!

$\Leftarrow$:

Annahme: a_n konvergiert nicht gegen a
Es existiert also ein ϵ so dass $|a_n - a| \geq \epsilon$, wir konstruieren nun ein Teilfolge die immer grösser oder gleich ϵ ist, aber dennoch beschränkt ist da a_n es ist, es folgt diese Teilfolge besitzt einen Häufungspunkt, der von a verschieden ist, also existiert ein zweiter Häufungspuntk für a_n Widerspruch! □

Satz 1.7.7. *Sei $(a_n)_n$ eine beschraenkte und monotone reelle Zahlenfolge. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent.*

Beweis. Wir unterscheiden nun einmal 2 Fälle , wobei sich der zweite Fall mit den schon hergeleiteten Grenzwertsätzen aus dem ersten ergibt.

1. Fall: (a_n) ist monoton wachsend. Annahme (a_n) ist nicht konvergent, dann gibt es also zwei Häufungspunkte a$\neq$b. OBdA sei $b < a$. Wir finden nun aso eine konvergente Teilfole und hierzu k_0 und l_0, so dass:

   $$|a_{n_k} - a| < \epsilon \qquad \forall k \geq k_0 \tag{1.34}$$
   $$|a_{n_l} - b| < \epsilon \qquad \forall l \geq l_0 \tag{1.35}$$

   Für $\epsilon = \dfrac{a-b}{2}$ ergibt sich

   $$a_{n_l} < b + \epsilon = \frac{a+b}{2} = a - \epsilon < a_{n_k} \qquad \forall k \geq k_0 \; \forall l \geq l_0 \tag{1.36}$$

   Es ist also

   $$a_{n_l} < a_{n_k} \qquad \forall\, k \geq k_0 \; \forall\, l \geq l_0 \tag{1.37}$$

   Auf Grund der Monotonie von a_n gilt aber auch

   $$a_{n_l} \geq a_{n_k} \qquad \forall\, l \geq k \tag{1.38}$$

   Widerspruch!

2. Fall: Betrachte ($-a_n$), was monoton wachsend ist und wende 1. an, die Behauptung folgt

□