25.Ganzrationale Funktionen

25.1 Definition einer ganzrationalen Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (\text{mit: } a_n \neq 0)$$

Die rechte Seite der Gleichung nennt man ein Polynom (n-ten Grades)

25.2 Horner Schema

Mit dem Horner Schema kann man u.a. die Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion berechnen. Beispiel: f(4) der Funktion **$f(x)= 5x^3+10x^2-20x+100$** berechnen:

1. In die oberste Zeile: Die Koeeffizienten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...a_0 (fehlende Koeffizenten a als Null eintragen!)
2. In die untere Zeile ganz links: Die Stelle x an der f(x) berechnet werden soll
3. In die untere Zeile unterhalb von a_n nochmal a_n eintragen
4. Die Zahl 4 (untere Zeile ganz links) mit a_n=5 multiplizieren, und den Wert rechts oben (10) addieren. Nun das Zwischenergebnis (30) eintragen:

plus

	5	10	-20	100
4	5	30		

mal

5. Schritt 4 mit jedem Zwischenergebnis wiederholen:

plus

	5	10	-20	100
4	5	30	100	

mal

6. Am Ende der Rechnung steht das Ergebnis unten rechts:

plus

	5	10	-20	100
4	5	30	100	500

mal

25.3 Polynom-Division

$$\overbrace{(2x^3-3x^2+4x-2)}^{f(x)}:\overbrace{(x+2)}^{g(x)} = \underbrace{2x^2-7x+18}_{\text{Quotient } q(x)} + \underbrace{\frac{-38}{(x+2)}}_{\frac{r(x)}{g(x)}}$$

$$\begin{array}{l}
2x^3+4x^2 \\
\hline
\quad -7x^2+\;\;4x-2 \\
\quad -7x^2-14x \\
\hline
\qquad\qquad +18x-\;\;2 \\
\qquad\qquad +18x+36 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -38
\end{array}$$

Rest r(x)

1. Das höchste Glied von f(x) durch das höchste Glied von g(x) teilen ($2x^3$:x).
   Das Ergebnis ($2x^2$) ist der erste Summand von q(x).
2. Diesen Summanden ($2x^2$) mit g(x) multipizieren, und das Ergebnis unter f(x) aufschreiben, und von f(x) abziehen.
3. Mit dem Ergebnis ($-7x^2+4x-2$) die Schritte 1 und 2 wiederholen usw.

25.4 Polynomdivision durch Linearfaktor

Einen Ausdruck (x-a) nennt man Linearfaktor, weil x in der 1.Potenz (linear) ist.
Teilt man ein Polynom p(x) durch einen Linearfaktor (x-a):

$$p(x):(x-a) = q(x) + r(x):(x-a)$$

so gelten folgende zwei Aussagen:

- Die Koeffizienten von q(x) sind die Zahlen in der unteren Reihe des Horner-Schemas.

- r(x) ist gleich der Zahl, die rechts unten im Horner-Schema steht.

25.5 Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

Die Nullstellen der ganzrationalen Funktion:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (\text{mit: } a_n \neq 0)$$

Sind die Lösungen der zugehörigen algebraischen Gleichung:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

25.6 Anzahl der Nullstellen

Anzahl der Nullstellen entspricht der Anzahl der Lösungen der zugehörigen algebraischen Gleichung, und hängt vom Grad der Funktion ab:

- Maximale Anzahl der Nullstellen entspricht dem Grad n der Funktion
- Minimale Anzahl der Nullstellen: 1 bei ungerade Funktionen, 0 bei geraden Funktionen
  (Gerade Funktion = Das höchste Glied hat einen geraden Exponenten: 2, 4, 6, 8, ...)

25.7 Nullstellensatz

Ein Polynom p(x) ist genau dann durch (x-a) ohne Rest teilbar, wenn a eine Nullstelle der Funktion f(x)=p(x) ist:

$$\frac{p(x)}{x-a} = q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ ist Nullstelle der Funktion } f(x) = p(x)$$

25.8 Lösen einer algebraischen Gleichung

Algebraische Gleichung gegeben

↓

Quadratische Gleichung? → ja: Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwenden. Rechnung bzw. Zwischenrechnung ist beendet.

↓ nein

Kann x oder eine Potenz von x ausgeklammert werden (möglich wenn das Absolutglied fehlt)? → ja: x oder Potenz von x ausklammern. Erste Lösung ist gefunden: x=0. Die Klammern nullsetzen, und auf diese neue Gleichung nun wieder dieses Lösungsschema anwenden liefert weitere Lösungen

↓ nein

Ist die Gleichung eine biquadratische Gleichung (eine biquadratische Gleichung liegt vor, wenn der Exponent des niedrigsten Gliedes ($6x^3$) ein Teiler der anderen Exponenten ist. Beispiel: $2x^9+4x^6+6x^3+1=0$)? → ja: Substituierte Gleichung aufstellen: $x^3=z$ -> $2z^3+4z^2+6z+1=0$ Auf diese Gleichung dann wieder dieses Schema anwenden. Rücksubstitution ($z=x^n$) der Lösungen liefert die restlichen Lösungen x_i der ursprünglichen Gleichung.

↓ nein

Hat die Gleichung eine ganzzahlige Lösung x_i (Teiler des Absolutgliedes untersuchen) die erraten werden kann? → ja: Die Gleichung durch ($x-x_i$) teilen: Das Ergebnis ist q(x). Auf die Gleichung q(x)=0 dieses Schema anwenden, liefert weitere Lösungen

↓ nein

Näherungsverfahren benutzen (z.B. Newton-Verfahren) oder die Cardianischen Formeln (für Gleichungen 3. und 4. Grades).