L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A1

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 1 geht):

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 1 \text{ geht der Zähler gegen } \ln 1 = 0 \\ \text{Für } x \to 1 \text{ geht der Nenner gegen } 1-1=0\end{array}\right\} \text{L'Hospital darf angewendet werden}$$

- Zähler und Nenner differenzieren und den Doppelbruch vereinfachen:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} =$$

  ▹ Hinweis zum Differenzieren des Zählers: Die Ableitung von ln(x) ist $\frac{1}{x}$

  ▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners: Die Ableitung von x-1 ist 1

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

  $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1}$

A2

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} =}$$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } \sin 0 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } 2 \cdot 0 = 0\end{array}\right\} \text{L'Hospital darf angewendet werden}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} =$$

▹ Hinweis zum Differenzieren des Zählers: Die Ableitung von sin(x) ist cos(x)

▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners: Die Ableitung von 2x ist 2

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}}$$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A3

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren und den Term vereinfachen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x =$$

▷ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:
   1. Zähler Gliedweise differenzieren (Summenregel)
   2. Die Ableitung von e^x ist e^x (siehe Formelsammlung)
   3. Die Ableitung von 1 ist 0 (Konstantenregel)

▷ Hinweis zum Differenzieren des Nenners: Die Ableitung von 2x ist 2

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A4

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler } (1-\cos x) \text{ gegen } 1-\cos 0 = 1-1 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner } (x^2) \text{ gegen } 0^2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital ist anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

▹ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:
1. Zähler Gliedweise differenzieren (Summenregel)
2. Die Ableitung von 1 ist 0 (Konstantenregel)
3. Die Ableitung $-\cos x$ ist $\sin x$ (siehe Formelsammlung)

▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners: Die Ableitung von x^2 ist 2x

- Nun versuchen wir den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{\sin 0}{2\cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Die Grenzwertberechnung funktioniert nicht, da dabei wieder ein unbestimmter Ausdruck $\left(\frac{0}{0}\right)$ entsteht. Wir müssen daher auf das Ergebnis der ersten Differentation (wurde oben blau markiert) die Regel von L'Hospital nochmals anwenden.

- 2.Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}$$

- Nun versuchen wir wieder den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A5

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x} =}$$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler } (\tan x) \text{ gegen } \tan 0 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner } (5x) \text{ gegen } 5\cdot 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)'}{(5x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)+1}{5}$$

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)+1}{5} = \frac{\tan^2(0)+1}{5} = \frac{0+1}{5} = \frac{1}{5}$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x} = \frac{1}{5}}$$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A6

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}}$$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } 1-\cos 0 = 1-1 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } \sin(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x}$$

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = 0}$$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A7

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x - \sin x} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } e^0 - 0 - 1 = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } 0 - \sin 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{1 - \cos x}$$

- Wir versuchen den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{1 - \cos x} = \frac{e^0 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Die Grenzwertberechnung funktioniert nicht, da dabei wieder ein unbestimmter Ausdruck $\left(\frac{0}{0}\right)$ entsteht. Wir müssen daher auf das Ergebnis der ersten Differentation (wurde oben blau markiert) die Regel von L'Hospital nochmals anwenden.

- Regel von L'Hospital nochmals anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\sin x}$$

- Wir versuchen den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\sin x} = \frac{e^0}{\sin 0} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$$

- Ergebnis: $\boxed{\text{Der Grenzwert existiert nicht, die Funktionswerte werden unendlich groß}}$

L’Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A8

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\text{x}-2}{\sin(\text{x-}2)} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 2 geht):

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{Für x} \to 2 \text{ geht der Zähler gegen} & 2-2=0 \\ \text{Für x} \to 2 \text{ geht der Nenner gegen} & \sin(2-2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

  $$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(\text{x}-2)'}{(\sin(\text{x-}2))'} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1-0}{\cos(x-2)\cdot 1} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\cos(x-2)}$$

  ▹ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:
  1. Summenregel anwenden (summandenweise differenzieren)
  2. Potenzregel anwenden (Ableitung von x ist 1)
  3. Konstantenregel anwenden (Ableitung der Konstante 2 ist 0)

  ▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners:
  1. Man muß man die Kettenregel anwenden

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

  $$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\cos(x-2)} = \frac{1}{\cos(2-2)} = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\text{x}-2}{\sin(\text{x-}2)} = 1}$

A9

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} =}$$ Alternative Schreibweisen: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x}$ oder: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x}$

Hinweis:

Man kann nur den einseitigen Grenzwert bilden,
da die Logarithmus-Funktion nur für positive x definiert ist.

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf

(Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0^+ geht) :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0^+ \text{ geht der Zähler gegen } -\infty \\ \text{Für } x \to 0^+ \text{ geht der Nenner gegen } 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital ist } \textbf{nicht} \text{ anwendbar}$$

- Grenzwert ohne die Regel von L'Hospital bestimmen:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{+0} = -\infty$$

Erklärung:

Der Betrag des Zählers wird unendlich groß, der Betrag des Nenners wird unendlich klein, also wird der Betrag des Bruches unendlich groß.
Das Vorzeichen ergibt sich aus der Tatsache, das der Zähler negativ wird, und der Nenner positiv bleibt.

- Ergebnis:

$$\boxed{\text{Es existiert nur der uneigentliche Grenzwert } -\infty}$$

A10

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} =}$$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } \sin(0) = 0 \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } e^0 - 1 = 1 - 1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital ist anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren und den Term vereinfachen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x}$$

▹ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:

Die Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x)$

▹ Hinweise zum Differenzieren des Nenners:

1. Die Nenner wird gliedweise differenziert (Summandenregel)
2. Die Ableitung von e^x ist e^x (siehe Formelsammlung)
3. Die Ableitung von -1 ist 0 (Konstantenregel)

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{\cos 0}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1}$$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A11

- Gesucht:

$$\boxed{\lim_{x\to5}\frac{2^{x-5}-1}{\sin(x-5)}=}$$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 5 geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x\to5 \text{ geht der Zähler gegen } 2^{5-5}-1=2^0-1=1-1=0\\ \text{Für } x\to5 \text{ geht der Nenner gegen } \sin(5-5)=\sin(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{L'Hospital ist anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to5}\frac{(2^{x-5}-1)'}{(\sin(x-5))'}=\lim_{x\to5}\frac{(2^{x-5})'-(1)'}{\cos(x-5)\cdot1}=\lim_{x\to5}\frac{\ln2\cdot2^{x-5}}{\cos(x-5)}$$

▷ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:

1. Den Zähler Gliedweise differenzieren (Summenregel)
2. Die Ableitung von 2^{x-5} ist $\ln2\cdot2^{x-5}$ (siehe Formelsammlung)
3. Die Ableitung von 1 ist 0 (Konstantenregel)

▷ Hinweise zum Differenzieren des Nenners:

1. Die Kettenregel benutzen
2. Die Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x)$
3. Die Ableitung von $(x-5)$ ist 1

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to5}\frac{2^{x-5}\cdot\ln2}{\cos(x-5)}=\frac{2^{5-5}\cdot\ln2}{\cos(5-5)}=\frac{2^0\cdot\ln2}{\cos(0)}=\frac{1\cdot\ln2}{1}=\ln2$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\lim_{x\to5}\frac{2^{x-5}-1}{\sin(x-5)}=\ln2}$$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A12

• Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\ln\frac{x}{2}}{\sqrt{x-2}} =}$

• Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
(Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 2^+ geht):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 2^+ \text{ geht der Zähler gegen } \ln\frac{2}{2} = \ln 1 = 0 \\ \text{Für } x \to 2^+ \text{ geht der Nenner gegen } \sqrt{2^+ - 2} = \sqrt{0^+} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

• Zähler und Nenner differenzieren, Term vereinfachen und Doppelbruch beseitigen:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{\left(\sqrt{x-2}\right)'} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot 1} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2\sqrt{x-2}}{x}$$

▷ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:

1.Man muß die Kettenregel anwenden: $g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

2.Die Ableitung von ln(x) ist $\frac{1}{x}$

3.Die Ableitung von $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$ ist $\frac{1}{2}$ (Potenzregel)

▷ Hinweise zum Differenzieren des Zählers:

1.Man muß die Kettenregel anwenden: $g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

2.Die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.Die Ableitung von x-2 ist 1 (Summen- und Potenzregel)

• Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2\sqrt{x-2}}{x} = \frac{2\sqrt{2-2}}{2} = \frac{2\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

• Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\ln\frac{x}{2}}{\sqrt{x-2}} = 0}$

L'Hospitial - Lösungen der Aufgaben

A13

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x\cdot\sin(x)+\cos(x)-1} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf
  (Zähler und Nenner müssen gegen 0 gehen, wenn x gegen 0 geht):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für } x\to 0 \text{ geht der Zähler gegen:} & \sin(0)-0\cdot\cos(0)=0 \\ \text{Für } x\to 0 \text{ geht der Nenner gegen:} & 0\cdot\sin(0)+\cos(0)-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L'Hospital anwendbar}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x) - x\cdot\cos(x)]'}{[x\cdot\sin(x)+\cos(x)-1]'} =$$

Zuerst muß man die Summenregel anwenden (gliedweise differenzieren):

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)]' - [x\cdot\cos(x)]'}{[x\cdot\sin(x)]' + [\cos(x)]' - [1]'} =$$

Um die einzelnen Glieder zu differenzieren, muß man einige Regeln anwenden.
Das folgende Bild zeigt die Regeln, die man nun anwenden muß:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{[\sin(x)]'}^{\cos x} - \overbrace{[x\cdot\cos(x)]'}^{\substack{\text{Produktregel} \\ \text{anwenden:} \\ (uv)'=u'v\cdot uv'}}}{\underbrace{[x\cdot\sin(x)]'}_{\substack{\text{Produktregel} \\ \text{anwenden:} \\ (uv)'=u'v\cdot uv'}} + \underbrace{[\cos(x)]'}_{-\sin x} - \underbrace{[1]'}_{\substack{\text{Konstanten-} \\ \text{regel ergibt 0}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) \quad - \quad 1\cdot\cos(x) + x\cdot(-\sin x)}{1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) \quad - \quad \sin(x) \quad + \quad 0}$$

- Den Term vereinfachen (die meisten Glieder heben sich gegenseitig auf):

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\cdot\sin x}{x\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\cos x}$$

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin 0}{\cos 0} = -\frac{0}{1} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x\cdot\sin(x)+\cos(x)-1} = 0}$