L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B1

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf

  Für $x \to \infty$ geht der Zähler gegen ∞
  Für $x \to \infty$ geht der Nenner gegen $e^{\infty} = \infty$ } L'Hospital darf angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen ∞ gehen

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}$$

  ▹ Hinweis zum Differenzieren des Zählers: Die Ableitung von x ist 1 (Potenzregel)

  ▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners: Die Ableitung von e^x ist e^x

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B2

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{5x}} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

  Für $x \to \infty$ geht der Zähler gegen ∞
  Für $x \to \infty$ geht der Nenner gegen $e^{5\cdot\infty} = \infty$

  $\Big\}$ L'Hospital darf angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen ∞ gehen

- Zähler und Nenner differenzieren und kürzen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^{5x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5\cdot e^{5x}}$$

  ▹ Hinweise zum Differenzieren des Nenners:

  1.Kettenregel benutzen

  2. Die Ableitung von e^x ist e^x

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{5\cdot e^{5x}} = \frac{1}{5\cdot e^{5\cdot\infty}} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{5x}} = 0}$

B3

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty \text{ geht der Zähler gegen } \ln(\infty) = \infty \\ \text{Für } x \to \infty \text{ geht der Nenner gegen } \infty^3 = \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren und Bruch vereinfachen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot 3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3}$$

▷ Hinweis zum Differenzieren des Zählers:

Die Ableitung von $\ln x$ ist $\frac{1}{x}$ (siehe Formelsammlung)

▷ Hinweis zum Differenzieren des Nenners:

Die Ableitung von x^3 ist $3x^2$ (ergibt sich aus der Potenzregel)

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3 \cdot \infty^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0}$

B4

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} =}$

- Hinweis:
  Man könnte hier zwar mit der Regel von L'Hospital arbeiten, jedoch ist es einfacher, den Bruch zuerst zu kürzen, weil dadurch der unbestimmte Ausdruck in einen bestimmten Ausdruck übergeht.

- Kürzen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x \cdot x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x \cdot \cancel{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B5

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} =}$ mit: x>0

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty \text{ geht der Zähler gegen } \ln(\infty) = \infty \\ \text{Für } x \to \infty \text{ geht der Nenner gegen } e^{\infty} = \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren und Bruch vereinfachen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^x}$$

Hinweis: Die Ableitungen von ln x und e^x muß man der Formelsammlung entnehmen

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = \frac{1}{\infty \cdot e^{\infty}} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0}$

B6

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0^+ \text{ geht der Zähler gegen } -\infty \\ \text{Für } x \to 0^+ \text{ geht der Nenner gegen } +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\cot x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

Die Ableitungen von ln x und cot x der Formelsammlung entnehmen

- Doppelbruch vereinfachen:

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1} = \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

- Nun versuchen wir den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \frac{-\sin^2 (0^+)}{0^+} = \frac{0}{0}$$

Es entsteht wieder ein unbestimmter Ausdruck. Daher müssen wir die Regel von L'Hospital nochmal anwenden

- Regel von L'Hospital nochmals anwenden

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(-\sin^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = \lim_{x\to 0^+} -2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

- Nun können wir den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\to 0^+} -2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -2 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B7

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = ?}$ $n > 0$

Hinweis: x^n kann auch eine Wurzel sein, wenn n eine reelle Zahl ist.

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty \text{ geht der Zähler gegen } \infty \\ \text{Für } x \to \infty \text{ geht der Nenner gegen } \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot n \cdot x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n \cdot x^n}$$

▷ Hinweis zum Differenzieren des Zählers:

Die Ableitung von $\ln(x)$ ist $\frac{1}{x}$

▷ Hinweis zum Differenzieren des Nenners:

Die Ableitung von x^n ist $n \cdot x^{n-1}$

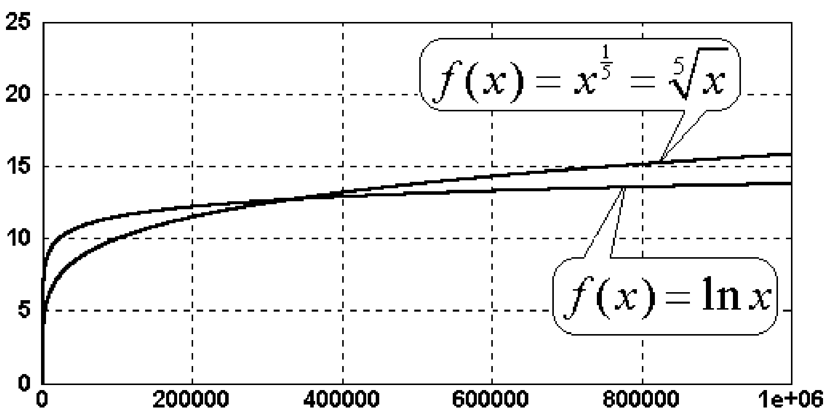
- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n \cdot x^n} = \frac{1}{n \cdot \infty^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$ $n > 0$

- Deutung:

Dem Ergebnis kann man entnehmen, daß die Funktionswerte <u>jeder</u> Potenzfunktion x^n (n>1) bzw. <u>jeder</u> Wurzelfunktion (0>n>1) die Werte der natürlichen Logarithmusfunktion irgendwann überholen.



L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B8

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

  $\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty \text{ geht der Zähler gegen } \infty \\ \text{Für } x \to \infty \text{ geht der Nenner gegen } \infty\end{array}\right\}$ L'Hospital darf angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen ∞ gehen

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

- Versuchen den Grenzwert zu berechnen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Die Anwendung der Regel von L'Hospital führt wieder auf einen unbestimmten Ausdruck. Wir müssen daher die Regel von L'Hospital nochmals anwenden

- Zähler und Nenner nochmals differenzieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$$

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0}$

Hinweis: Die nächste Aufgabe ist eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe.

- Eine nebenbei gewonnene Erkenntnis:

  Weil der Quotient für große x zu 0 wird, wissen wir, daß die Werte der Funktion e^x (für große x) wesentlich größer werden, als die Werte der Potenzfunktion x^2.
  In der nächsten Aufgabe zeigen wir, daß dies für <u>alle</u> Potenzfunktionen gilt.

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B9

- Notwendige Vorkenntnisse:
  Für diese Aufgabe sollte man wissen, was man unter der n-ten Fakultät (geschrieben: n!) versteht: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (Beispiel: $4!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$)

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} =}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :
  Für $x \to \infty$ geht der Zähler gegen ∞
  Für $x \to \infty$ geht der Nenner gegen ∞
  } L'Hospital darf angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen ∞ gehen

- Zähler und Nenner differenzieren:
  Im Gegensatz zu sonst differenzieren wir n-mal (bilden die n-te Ableitung) und berechnen dann den Grenzwert. Die Erklärung folgt gleich:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)''}{(e^x)''} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} =$$

•••

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)^{(n)}}{(e^x)^{(n)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 1}^{n!} \bullet x^{n-n}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n! \cdot x^0}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0$$

Wir erkennen: Wir müssen n-mal differnzieren, denn dann wird der Exponent von x zu 0, und dadurch verschwindet x aus dem Zähler, wodurch der Zähler zur Konstanten n! wird. Nun ist der Grenzwert berechenbar (ein unbestimmter Ausdruck kann ja nicht mehr entstehen, denn es gibt keinen unbestimmten Ausdruck, der ein Konstante im Zähler oder Nenner hat).

Zur nochmaligen Verdeutlichung zeigen wir was passieren würde, wenn wir einmal zu wenig (also nur $n-1$ mal) differenzieren würden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)^{(n-1)}}{(e^x)^{(n-1)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 2}^{n!} \bullet x^{n-(n-1)}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n! \cdot x^1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n! \cdot x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Wir sehen: Differenzieren wir nur (n-1) mal und nicht n-mal, so liegt noch ein unbestimmter Ausdruck voi

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0}$

- Interpretation des Ergebnisses
  Die Funktionswerte der Exponentialfunktion überholen (für große x) die jeder Potenzfunktion (z.B. überholt $y=e^x$ auch irgendwann die Funktionswert von $y= x^{1000000}$, obwohl $y= x^{1000000}$ am Anfang natürlich viel schneller wächst als die Funktion e^x).

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B10 - Lösungsvariante 1

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan x} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

  $\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \frac{\pi}{2} \text{ geht der Zähler gegen } \tan(3x) = \infty \\ \text{Für } x \to \frac{\pi}{2} \text{ geht der Nenner gegen } \tan(x) = \infty\end{array}\right\}$ L'Hospital darf angewendet werden, da Zähler und Nenner gegen ∞ gehen

- Zähler und Nenner differenzieren und den Doppelbruch vereinfachen:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{[\tan(3x)]'}{[\tan(x)]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2(3x)}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 x}{\cos^2(3x)}$$

- Wir versuchen nun den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 x}{\cos^2(3x)} = \frac{3\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0}$$

Weil wieder ein unbestimmter Ausdruck entsteht, müßte man nochmal die Regel von L'Hospital anwenden. Die Ableitungen wären aber sehr kompliziert, und daher vereinfchen wir den Grenzwert mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 x}{\cos^2(3x)} = 3\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2(3x)} = 3\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right)^2 = 3\cdot\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos(3x)}\right)^2 \leftarrow \boxed{\text{Zwischen-ergebnis}}$$

- Nebenrechnung:

Nun bestimmen wir in einer Nebenrechnung den Grenzwert in der Klammer:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos(3x)} = \frac{0}{0}$$ (unbestimmter Ausdruck, deshalb L'Hospital anwenden)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x]'}{[\cos(3x)]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin(3x)} = \frac{-1}{-3\cdot(-1)} = -\frac{1}{3} \leftarrow \boxed{\text{Ergebnis der Nebenrechnung}}$$

- Einsetzen des Ergebnisses der Nebenrechnung in das Zwischenergebnis:

Einsetzen: $3\cdot\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos(3x)}\right)^2 = 3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan x} = \dfrac{1}{3}}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B10 (Lösungsvariante 2)

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} =}$

- Vereinfachen

  Wir vereinfachen den Term zunächst, indem wir die trigonometrische Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und die Grenzwertsätze anwenden:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} \overset{\substack{\text{Erklärung}\\\text{siehe oben}}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \overset{\substack{\text{Doppelbruch}\\\text{vereinfachen}}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right) \overset{\substack{\text{Grenzwertsatz}\\\text{über Produkte}}}{=}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x}\right) \bullet \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right) \overset{\substack{\text{Grenzwertsatz}\\\text{über Quotienten}}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(3x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x} \bullet \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right) \overset{\substack{\text{Grenzwert des}\\\text{1.Faktors}\\\text{berechnen}}}{=}$$

$$\frac{-1}{1} \bullet \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right) \overset{\substack{\text{Bruch}\\\text{vereinfachen}}}{=} (-1)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right)$$

- Wir versuchen nun den Term bzw. Grenzwert zu berechnen:

$$(-1)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right) = (-1)\cdot\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)}\right) = -\frac{0}{0}$$

  Weil ein unbestimmter Ausdruck entsteht, müssen wir nun die Regel von L'Hospital anwenden:

- Zähler und Nenner differenzieren (d.h. Regel von L'Hospital anwenden):

$$(-1)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x]'}{[\cos(3x)]'} = (-1)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin(3x)}$$

- Wir versuchen nochmals den Term bzw. Grenzwert zu berechnen:

$$(-1)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin(3x)} = (-1)\cdot\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{-3\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = (-1)\cdot\frac{-1}{-3\cdot(-1)} = \frac{1}{3}$$

  Geschafft! Der Grenzwert ließ sich berechnen.

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x} = \frac{1}{3}}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B11-Lösungsvariante 1

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot(2x)}{\cot(5x)} = \quad}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für x} \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } \cot(2\cdot 0) = \infty \\ \text{Für x} \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } \cot(5\cdot 0) = \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- L'Hospital anwenden (Zähler und Nenner differenzieren):

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\cot(2x)]'}{[\cot(5x)]'} \overset{\substack{\text{Zähler und Nenner} \\ \text{differenzieren}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-2}{\sin^2(2x)}}{\dfrac{-5}{\sin^2(5x)}} \overset{\substack{\text{Doppelbruch} \\ \text{beseitigen}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2}{-5}\cdot\frac{\sin^2(5x)}{\sin^2(2x)} \overset{\substack{\text{Grenzwertsatz} \\ \text{über Produkte} \\ \text{anwenden}}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{\sin^2(2x)} \overset{\substack{\text{Erster Grenzwert} \\ \text{kann schon} \\ \text{berechnet werden}}}{=} \frac{2}{5}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{\sin^2(2x)} \overset{\substack{\text{Potenzgesetz} \\ \text{anwenden}}}{=} \frac{2}{5}\cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}\right)^2 \overset{\substack{\text{Den Grenzwertsatz} \\ \text{für verkettete} \\ \text{Funktionen} \\ \text{anwenden}}}{=}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}\right)^2 \leftarrow \boxed{\text{Zwischenergebnis}}$$

In einer Nebenrechnung berechnen wir nun den Grenzwert in der Klammer!

•Nebenrechnung (Grenzwert in der Klammer berechnen):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(5\cdot 0)}{\sin(2\cdot 0)} = \frac{\sin(0)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$

Da ein unbestimmter Ausdruck entsteht, muß auch innerhalb der Nebenrechnung die Regel von L'Hospital einmal angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(5x)]'}{[\sin(2x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos(5x)}{2\cos(2x)} = \frac{5\cos(5\cdot 0)}{2\cos(2\cdot 0)} = \frac{5}{2} \leftarrow \boxed{\text{Ergebnis der Nebenrechnung}}$$

•Ergebnis aus der Nebenrechnung in das Zwischenergebnis einsetzen:

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}\right)^2 = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{50}{20} = 2.5$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot(2x)}{\cot(5x)} = 2.5}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B11 - Lösungsvariante 2

- Gesucht: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot(2x)}{\cot(5x)} =}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to 0 \text{ geht der Zähler gegen } \cot(2\cdot 0) = \cot(0) = \pm\infty \\ \text{Für } x \to 0 \text{ geht der Nenner gegen } \cot(5\cdot 0) = \cot(0) = \pm\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Vereinfachen

Wir vereinfachen den Term zunächst, indem wir die trigonometrische Beziehung $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ und die Grenzwertsätze anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot(2x)}{\cot(5x)} \overset{\substack{\text{Erklärung}\\\text{siehe oben}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}} \overset{\substack{\text{Doppelbruch}\\\text{vereinfachen}}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(2x)}{\cos(5x)}\cdot\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}\right) \overset{\substack{\text{Grenzwertsatz}\\\text{für Produkte}\\\text{anwenden}}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(5x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \overset{\substack{\text{Grenzwertsatz}\\\text{für Quotienten}}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos(2x)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(5x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \overset{\substack{\text{Grenzwerte}\\\text{im 1.Faktor}\\\text{berechnen}}}{=}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \overset{\substack{\text{1.Faktor}\\\text{fällt weg}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$$

- Versuchen den Grenzwert zu berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\cdot 0)}{\sin(5\cdot 0)} = \frac{0}{0}$$

Die Grenzwertberechnung ist nicht möglich, weil ein unbestimmter Ausdruck auftritt. Daher müssen wir L'Hospital anwenden

- Regel von L'Hospital anwenden (Zähler und Nenner differenzieren):

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(5x)]'}{[\sin(2x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos(5x)}{2\cos(2x)}$$

- Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\cos(5x)}{2\cos(2x)} = \frac{5\cos(5\cdot 0)}{2\cos(2\cdot 0)} = \frac{5\cos(0)}{2\cos(0)} = \frac{5\cdot 1}{2\cdot 1} = 2.5$$

- Ergebnis: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot(2x)}{\cot(5x)} = 2.5}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B12

- Gesucht: $\boxed{}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty 0^{+} \text{ geht der Zähler gegen } \infty \\ \text{Für } x \to \infty 0^{+} \text{ geht der Nenner gegen } \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x \to \infty 0^{+}} \frac{(\quad)'}{(\quad)'} =$$

▷ Hinweis zum Differenzieren des Zählers:

▷ Hinweis zum Differenzieren des Nenners:

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

- Ergebnis: $\boxed{}$

L'Hospital - Lösungen der Aufgaben

B13

- Gesucht: $\boxed{}$

- Überprüfen ob die Regel von L'Hospital angewendet werden darf :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } x \to \infty 0^+ \text{ geht der Zähler gegen } \infty \\ \text{Für } x \to \infty 0^+ \text{ geht der Nenner gegen } \infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{L'Hospital darf angewendet werden,} \\ \text{da Zähler und Nenner gegen } \infty \text{ gehen}\end{array}$$

- Zähler und Nenner differenzieren:

$$\lim_{x \to \infty 0^+} \frac{(\quad)'}{(\quad)'} =$$

▹ Hinweis zum Differenzieren des Zählers:

▹ Hinweis zum Differenzieren des Nenners:

- Nun kann der Grenzwert berechnet werden:

- Ergebnis: $\boxed{}$