

# Lineare Abbildungen

Sven Blumberg

28.02.2001

# Vorwort

Dieses Skript richtet sich an den Schulunterricht der Sekundarstufe II. Studierenden kann es als Wiederholung nützlich sein, es entspricht aber nicht den im Studium behandelten Linearen Abbildungen.

Das Anliegen dieses Skriptes ist eine geometrische (d.h. anschauliche) Motivation der Linearen Abbildungen darzulegen. Wir werden uns hauptsächlich auf den  $\mathbb{R}^2$  beschränken, da die studierten Eigenschaften sich ohne Probleme auf höhere Dimensionen übertragen lassen, die Frage hierbei ist nämlich, in wie weit bzw. ob überhaupt es nützlich sein könnte, diese höheren Dimensionen gesondert zu betrachten.

Die wichtigste Anwendung dieser Abbildung ist nämlich z.B. die Computergraphik, darum wollen wir auch an einige Stellen gesondert auf die einzelnen Abbildungstypen eingehen.

Nun bleibt mir nur noch zu hoffen, dass dieses Skript dem Leser verständlich ist und ihm auch nützt. Für Anregungen, Verbesserungsvorschläge und bei Fehlern bitte ich um eine kurze E - Mail an

`sven.b@okay.net`

Sven Blumberg

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>3</b>
1.1	Einführung . . . . .	3
1.1.1	Spiegelungen . . . . .	4
1.1.2	Streckungen . . . . .	5
1.1.3	Drehungen und Scherungen . . . . .	6
1.2	Eigenschaften von Linearen Abbildungen . . . . .	8
1.3	Darstellung von linearen Abbildungen . . . . .	11
1.4	Exkurs: Matrizen . . . . .	15
1.5	Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume . . . . .	21
1.6	Klassifizierung von Linearen Abbildungen . . . . .	24
1.7	Fixelemente . . . . .	26
	<b>Index</b>	<b>26</b>

# Kapitel 1

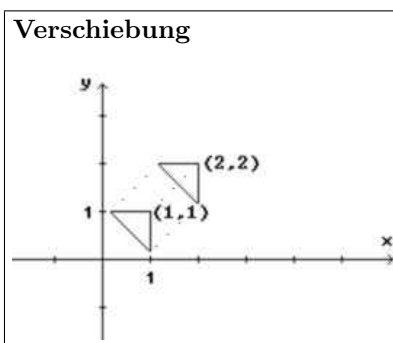
## Lineare Abbildungen

### 1.1 Einführung

Wir kennen z.B. aus dem Geometrieunterricht verschiedene Abbildungen in der Ebene. Abbildungen in der Ebene sind dabei Abbildungen der Ebene, die wieder in die Ebene abbilden; einige überführen z.B. Dreiecke in Dreiecke.

Wir kennen dabei z.B. Verschiebungen, Spiegelungen an Achsen (insbesondere hierbei an der  $x$ - oder der  $y$ -Achse), Spiegelungen an Punkten, Drehungen, Streckungen und noch viele mehr. In der klassischen Geometrie, wie man sie in der Sekundarstufe I lernt, untersucht man dabei, wie man diese verschiedenen Abbildungen konstruiert.

Die Linearen Abbildungen der Sekundarstufe II sind dabei wichtige Elemente der sogenannten analytischen Geometrie. Analytische Geometrie soll nun dabei heissen, dass man versucht, die Methoden der Analysis auf die Geometrie zu übertragen, die Geometrie analytisch zu erfassen. Das heisst nun für uns im Speziellen, dass wir versuchen die verschiedenen Abbildungen durch **Abbildungsgleichungen** zu erfassen und an Ihnen die Eigenschaften der Abbildungen wiederzuerkennen.



Wir wollen hierfür nun versuchen eine Abbildungsgleichung zu entwickeln (dies ist zwar nur ein einfaches Beispiel, aber so erkennt man schneller das Prinzip). Wir werden dabei zwei Dinge beachten

1. Bei der Verschiebung, bleibt das Dreieck in Form und Ausrichtung erhalten, d.h. alle Punkte werden gleich abgebildet (im Gegensatz z.B. zur Streckung)
2. Alle Punkte werden parallel verschoben

Wenn wir uns nun die jeweiligen Ecken der beiden Dreiecke durch Pfeile verbunden vorstellen, erkennt man, dass die Pfeile alle die gleiche Richtung und Länge haben.

D.h. wir haben schon eine Gemeinsamkeit zwischen den Punkten und den verschobenen Punkten gefunden. So wird zum Beispiel der Punkt (1,1) auf (2,2) verschoben, der Punkt (0,1) auf (1,2), etc.; wir erhalten dann somit folgende Abbildungsgleichung, wenn wir den Punkt mit  $(x,y)$  und den verschobenen Punkt mit  $(x',y')$  bezeichnen

$$\begin{cases} x' &= x + 1 \\ y' &= y + 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Wir haben also unsere erste geometrische Abbildung durch eine Gleichung beschreiben können. Im Übrigen, sei bemerkt, dass das abgebildete Dreieck schon durch die abgebildeten Eckpunkte eindeutig festgelegt, d.h. es genügt die Eckpunkte zu berechnen.

Wir wollen nun ein noch die Gleichungen für ein paar weitere Abbildungen ermitteln.

### 1.1.1 Spiegelungen

Wir unterscheiden drei Arten von Spiegelungen

1. **Punktspiegelungen** sind Spiegelung an einem Punkt, wir werden hierbei nur die Spiegelungen am Ursprung betrachten, da andere Punktspiegelungen keine linearen Abbildungen sind (mehr dazu in Kapitel 1.2).

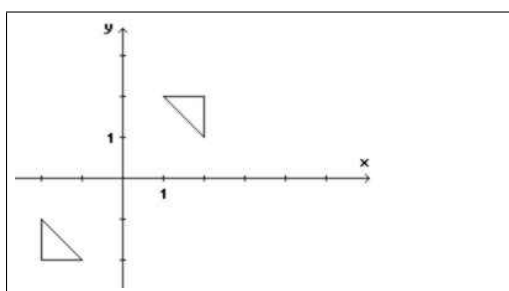


Abbildung 1.1: Punktspiegelung an 0

Betrachten wir nun zum Beispiel den Punkt  $(1,1)$ , dann wird er auf  $(-1,-1)$  gespiegelt, es ist also klar, dass

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y \end{cases} \quad (1.2)$$

die Abbildungsgleichung für eine Punktspiegelung am Ursprung ist, wenn wir mit  $(x,y)$  den Punkt bezeichnen und mit  $(x',y')$  den gespiegelten Punkt. Wir werden später noch darauf eingehen wieviele Punkte man abbilden muss um eine solche Abbildung eindeutig zu bestimmen.

2. **Achsen Spiegelungen** treten am häufigsten auf, sie sind wichtiger Bestandteil in der Optik. Hierbei spgelt man einem Punkt, indem man das Lot auf die sogenannten **Spiegelachse** setzt, d.h. den zu spiegelnden Punkt orthogonal mit der Spiegelachse verbindet. Nun setzt man die gleiche Strecke noch einmal 'hintendran' und erhält den gespiegelten Punkt

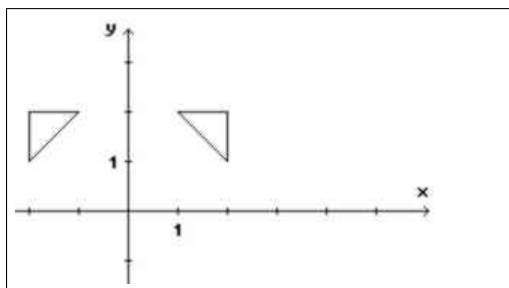


Abbildung 1.2: Achsen Spiegelung an der y - Achse

Die zugehörige Abbildungsgleichung ist

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \quad (1.3)$$

3. **Schrägspiegelungen** sind allgemeinere Achsenspiegelungen, da man hierbei nicht das Lot sondern eine vorgegebene **Richtungsachse**.

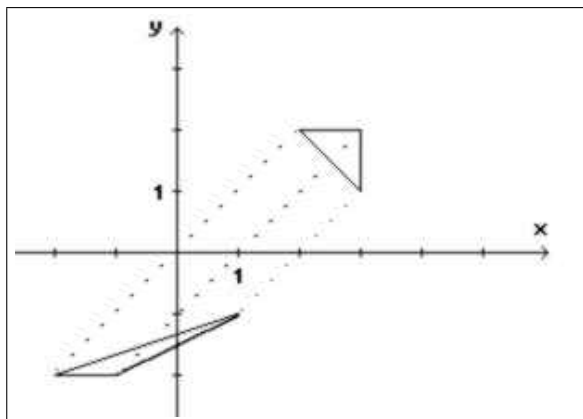


Abbildung 1.3: Schrägspiegelung an der x - Achse in Richtung der ersten Winkelhalbierenden

Die zugehörige Abbildungsgleichung ist

$$\begin{cases} x' &= x - 2y \\ y' &= -y \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Streckungen

Wir unterscheiden zwei Arten von Streckungen

1. **Zentrische Streckung** mit Streck - Zentrum  $z$  und Streckfaktor  $s$ , wobei uns wiederum nur zentrischen Streckungen vom Ursprung aus interessieren, da ansonsten die Linearität verlorengeht.

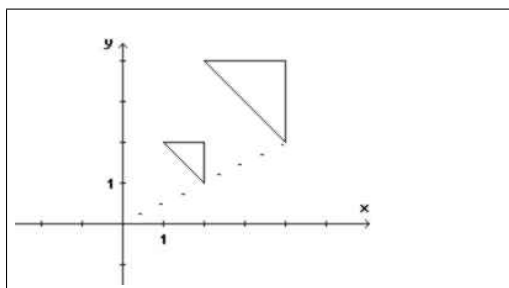
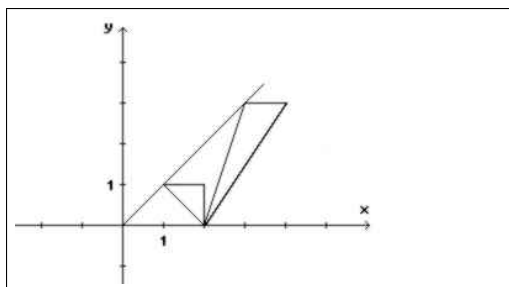


Abbildung 1.4: zentrische Streckung von  $(0,0)$  aus mit Streckfaktor 2

Die Abbildungsgleichung lautet dann

$$\begin{cases} x' &= 2x \\ y' &= 2y \end{cases} \quad (1.5)$$

2. **Parallelstreckung** entlang an einer gegebenen Achse  $s$  in Richtung einer Geraden  $g$  mit Streckfaktor  $k$ .

Abbildung 1.5: Parallelstreckung an der  $x$ -Achse mit Streckfaktor 2 in Richtung  $y = x$ 

Man nennt hierbei  $s$  (in der Abbildung ist dies die  $x$ -Achse;  $g$  ist dies die erste Winkelhalbierende) die **Streckachse**.

Wir wollen nun einmal etwas ausführlicher die Abbildungsgleichung für das Beispiel ermitteln.

Wir bezeichnen nun mit  $P$  einen Punkt und mit  $P'$  seinen abgebildeten Punkt, dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden

- $P \in s$ , dann folgt  $P = P'$ .
- $P \notin s$ , dann folgt die Gerade  $PP'$  ist parallel zu  $g$ .

Wir betrachten hierbei den zweiten Fall, also hat die Gerade  $PP'$  die Steigung 2, es gilt also

$$\frac{y - y'}{x - x'} = 2 \quad (1.6)$$

und wegen dem ersten Fall

$$y' = 2y \quad (1.7)$$

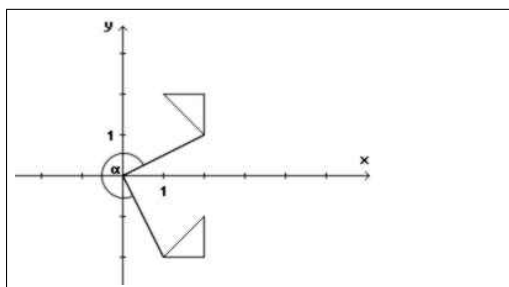
fassen wir nun beides zusammen, so erhalten wir als Abbildungsgleichung

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y \\ y' = 2y \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.1.3 Drehungen und Scherungen

Wir wollen kurz ohne Nachweis noch die beiden Abbildungsgleichungen angeben

1. **Drehungen** um einen Winkel  $\alpha$  sind wichtig insbesondere für die Computergraphik. Auch hier betrachten wir wiederum nur Drehungen um den Ursprung.

Abbildung 1.6: Drehung um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha$

Die Abbildungsgleichung lautet

$$\begin{cases} x' &= \cos(\alpha) \cdot x - \sin(\alpha) \cdot y \\ y' &= \sin(\alpha) \cdot x + \cos(\alpha) \cdot y \end{cases} \quad (1.9)$$

2. **Scherungen** an der Achse  $s$  um den Winkel  $\alpha$  werden folgendermassen konstruiert, man zieht vom Punkt  $P$  aus das Lot auf die sogenannte **Scherungsachse**  $s$ , an diesem Lot trägt man den Winkel  $\alpha$  ab und verbindet nun dies mit der zu  $s$  parallelen Gerade durch  $P$ ; der Schnittpunkt ist  $P'$ .

Die zugehörige Abbildungsgleichung lautet

$$\begin{cases} x' &= x + \tan(\alpha) \cdot y \\ y' &= y \end{cases} \quad (1.10)$$

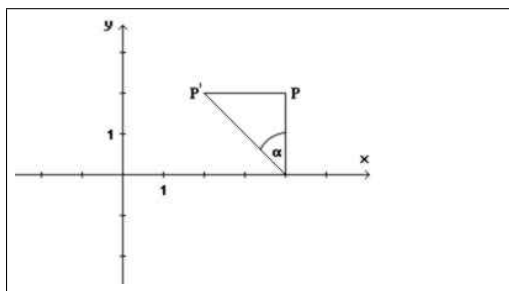


Abbildung 1.7: Scherung an der  $x$  - Achse um den Winkel  $\alpha$

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie für die Spiegelung an der  $x$  - Achse eine Abbildungsgleichung.

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie für die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden die Abbildungsgleichung

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie für die Parallelstreckung mit der  $y$  - Achse als Streckachse in Richtung der ersten Winkelhalbierenden mit dem Streckfaktor 3 eine Abbildungsgleichung.

**Aufgabe 4.** Bestimmen Sie eine Abbildungsgleichung, die die Punkte  $P (0,1)$ ,  $Q (1,0)$ ,  $O (0,0)$  auf die Punkte  $P' (2,0)$ ,  $Q' (1,1)$  und  $O' (1,0)$  abbildet. Solch eine Abbildung nennt man **affin - lineare Abbildung** oder **Affinität**

## 1.2 Eigenschaften von Linearen Abbildungen

Bevor wir über Eigenschaften reden können, müssen wir uns im klaren werden, was wir unter einer Linearen Abbildung verstehen wollen.

**Definition 1.2.1.** Eine **Lineare Abbildung** ist eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$ , für die gilt

1. Seien  $m_1, m_2 \in M$  zwei Elemente aus  $M$ , dann gilt

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad (1.11)$$

Diese Eigenschaft nennt man **Additivität**.

2. Sei  $m \in M$  ein Element aus  $M$  und  $r \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl, dann gilt

$$f(r \cdot m) = r \cdot f(m) \quad (1.12)$$

Dies nennt man **Homogenität**.

Wir nennen  $M$  die **Urbildmenge** von  $f$ . Das **Bild** von  $f$  ist die Menge

$$\text{Bild}(f) := \{f(m) : \text{mit } m \in M\} \quad (1.13)$$

Diese Definition ist nun ziemlich abstrakt darum wollen wir und an einigen Beispielen klar machen, dass wir schon sehr viele Beispiele kennen.

**Beispiel 1.2.2.**

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c \cdot x$  ( $c \neq 0$ ) ist eine lineare Abbildung, denn

$$f(x + y) = c \cdot (x + y) \quad (1.14)$$

$$= cx + cy \quad (1.15)$$

$$= f(x) + f(y) \quad (1.16)$$

und weiter

$$f(rx) = c \cdot (rx) \quad (1.17)$$

$$= r(cx) \quad (1.18)$$

$$= r \cdot f(x) \quad (1.19)$$

also ist  $f$  eine lineare Abbildung.

2. Spiegelungen am Ursprung, Drehungen um den Ursprung und zentrischem Streckung mit Zentrum  $(0,0)$  sind lineare Abbildungen

Wie wir nun beim ersten Beispiel gemerkt haben, ist es sehr aufwendig die beiden Bedingungen zu überprüfen, darum wollen wir folgende Eigenschaft überprüfen

**Satz 1.2.3.** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  ist genau dann linear, wenn für alle  $m_1, m_2 \in M$  und  $r, s \in R$  gilt

$$f(r \cdot m_1 + s \cdot m_2) = r \cdot f(m_1) + s \cdot f(m_2) \quad (1.20)$$

Wenn wir uns nun näher mit den so oben studierten Beispielen, aber auch mit den Bemerkungen des letzten Kapitels auseinandersetzen, dann finden wir noch eine weitere wichtige Eigenschaft, die allen linearen Abbildung gemeinsam ist.

**Lemma 1.2.4.** Für jede lineare Abbildung  $f$  gilt  $f(0) = 0$ .

**Beweis.** Es gilt

$$f(0) = f(0 \cdot 0) \quad (1.21)$$

$$= 0 \cdot f(0) = 0 \quad (1.22)$$

wobei die Umformung von (1.21) nach (1.22) auf Grund der Homogenität von  $f$  gilt, also haben wir insgesamt

$$f(0) = 0 \quad (1.23)$$

□

Wir wollen noch ein paar Eigenschaften kennenlernen

**Definition 1.2.5.** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt

- **geradentreu**, wenn das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist.
- **parallelentreu**, wenn die Bilder zweier paralleler Geraden wieder parallel sind.
- **umkehrbar**, wenn es eine Abbildung  $g$  gibt, so dass für jeden Punkt  $m \in M$  gilt

$$f(g(m)) = m \quad (1.24)$$

Man nennt dann  $g$  die **inverse Abbildung**

- **teilverhältnistreue**,  $T$  liege auf der Strecke  $\overline{AE}$  und sind  $A', E', T'$  die zugehörigen Bildpunkte, dann gilt

$$TV(ATE) = TV(A'T'E') \quad (1.25)$$

Es gilt dann folgender Satz

**Satz 1.2.6.** Für eine lineare Abbildung  $f: M \rightarrow N$  gilt

1. ist  $f$  geradentreu und umkehrbar, dann ist  $f$  parallelentreu
2. ist  $f$  geradentreu und umkehrbar, dann ist  $f$  teilverhältnistreue

**Beweis.**

1. Wir führen den Beweis indirekt. Seien  $g$  und  $h$  zwei parallele und verschiedene Geraden und es

bezeichnen  $g'$  und  $h'$  die Bilder der Geraden unter  $f$ .

**Annahme**  $g'$  und  $h'$  sind nicht parallel, dann folgt (da wir im  $\mathbb{R}^2$  sind), dass  $g$  und  $h$  mindestens einen Schnittpunkt haben; wir wollen diesen Schnittpunkt  $P$  nennen. Dann folgt aber, dass das **Urbild** von  $P$  auf  $g$  **und**  $h$  liegt! Dann wären  $g$  und  $h$  aber nicht parallel. Widerspruch!!! Also müssen  $g'$  und  $h'$  parallel sein.

□

**Definition 1.2.7.** Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $n \in N$  ein Punkt. Wenn es ein  $m \in M$  gibt, so dass

$$f(m) = n \quad (1.26)$$

dann heisst  $m$  das **Urbild** zu  $n$ .

---

**Aufgabe 5.** Beweisen Sie Satz 1.2.3

**Aufgabe 6.** Beweisen Sie Satz 1.2.6 2.

**Aufgabe 7.** Untersuchen Sie, ob die folgende Abbildungen umkehrbar sind

1.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.27)$$

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

2.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.29)$$

$$g(x) = x^2 \quad (1.30)$$

**Aufgabe 8.** Finden Sie eine Abbildung, die geradentreu aber nicht umkehrbar ist

### 1.3 Darstellung von linearen Abbildungen

Wir haben nun schon einige wichtige Eigenschaften von linearen Abbildungen kennengelernt und auch schon im ersten Teil einen wichtigen Schritt gemacht, indem wir Abbildungsgleichungen gefunden haben. Lineare Abbildungen sind nun ein Spezialfall der Abbildungen, die wir schon in 1.1. kennengelernt haben. Sie sind aber der wichtigste Fall, den wir hier betrachten wollen. Sie sind von grosser Bedeutung in der Algebra schon wegen den bequemen Eigenschaften, die wir zuvor kennengelernt haben.

Nun suchen wir wie schon zuvor auch eine Möglichkeit wie man diese darstellen kann. Dazu wollen wir uns erst einmal klar machen, wieviele Punkte man braucht, um eine lineare Abbildung festzulegen.

Dazu müssen wir uns aber erst einmal über den Zusammenhang zwischen einem Vektor und einem Punkt klar werden. Der Begriff Punkt ist intuitiv klar, wir müssen uns dazu nun noch

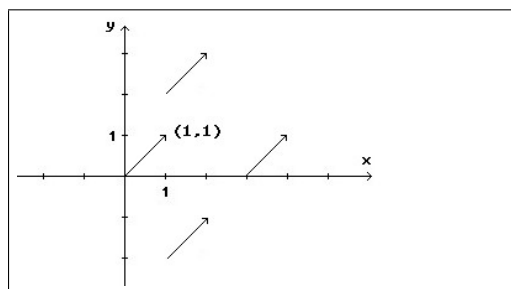


Abbildung 1.8: Punkt, Ortsvektor, Vektor

klar machen, dass es einen Pfeil gibt, der den Ursprung mit diesem Punkt verbindet. Dieser Pfeil ist ein **Vektor**; dieser spezielle Vektor heisst **Ortsvektor**. Wie man in der Figur erkennt, gibt es viele Pfeile, die die gleiche Richtung und Länge wie der Ortsvektor zum Punkt (1,1) hat. Darum unterscheidet man auch diese Pfeile nicht. Um nun zwischen Punkten und Vektoren besser zu unterscheiden, bezeichnen wir mit  $a = (1,1)$  den Punkt und  $\vec{a}$  den zugehörigen Vektor. Zur besseren Kennzeichnung findet man auch häufig, die beiden Komponenten untereinander geschrieben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir werden aber aus Platzgründen auf diese Schreibweise verzichten und schreiben stattdessen  $\vec{a} = (1,1)^T$ , wobei das T im "Exponenten" deutlich machen soll, dass es sich hierbei um einen Spaltenvektor handelt.

Nun müssen wir uns noch an ein paar Begriffe erinnern

**Definition 1.3.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum, die Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  heissen

1. **linear unabhängig**, wenn aus  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0$ , folgt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .
2. **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind, d.h. ein Vektor lässt sich als Linearkombination der anderen darstellen.
3. **Erzeugendensystem**, wenn es für jeden Vektor  $\vec{v} \in V$  eine Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  gibt mit

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{v} \quad (1.31)$$

4. **Basis**, wenn sie Erzeugendensystem und linear unabhängig sind

Diese Definitionen sind wieder sehr allgemein gefasst, zum besseren Verständnis empfiehlt es sich die Aufgaben am Ende des Abschnittes zu bearbeiten.

Nun können wir folgenden Satz formulieren

**Satz 1.3.2.** Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung und  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist die lineare Abbildung eindeutig durch die Bilder  $f(\vec{u})$  und  $f(\vec{v})$  festgelegt.

**Beweis.**  $f(\vec{u}), f(\vec{v})$  bilden ebenfalls eine Basis, das bedeutet, dass wir einen Vektor  $\vec{w}$  folgendermaßen abbilden können.

Da  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  eine Basis sind, gibt es Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  so dass

$$\vec{w} = \lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{u} \quad (1.32)$$

Wenden wir nun  $f$  auf  $\vec{w}$  an, dann folgt

$$f(\vec{w}) = f(\lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{u}) \quad (1.33)$$

und auf Grund der Linearität von  $f$  folgt dann

$$f(\lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{u}) = f(\lambda_1 \cdot \vec{v}) + f(\lambda_2 \cdot \vec{u}) \quad (1.34)$$

$$= \lambda_1 \cdot f(\vec{v}) + \lambda_2 \cdot f(\vec{u}) \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

□

Wir haben diesen Satz nur repräsentativ für den  $\mathbb{R}^2$  gezeigt, er überträgt sich ohne Probleme auf andere Dimensionen. Dies soll uns aber an dieser Stelle nicht weiter beschäftigen.

Wir wollen uns nun an Matrizen erinnern, es gilt

**Lemma 1.3.3.** Sei  $A$  eine  $(2 \times 2)$  - Matrix, dann ist die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.37)$$

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad (1.38)$$

eine lineare Abbildung

Wir kommen nun zu den verschiedenen Darstellungsarten einer linearen Abbildung

**Definition 1.3.4.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung. Es bezeichne  $\vec{e}_1 = (1,0)^T$  und  $\vec{e}_2 = (0,1)^T$  (man nennt dabei  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor). es sei weiter  $(a_1, a_2)^T = \vec{a} = f(\vec{e}_1)$  das Bild des ersten und  $(b_1, b_2)^T = \vec{b} = f(\vec{e}_2)$  das Bild des zweiten Einheitsvektor, dann gibt es die folgenden drei Darstellungen einer linearen Abbildung

1. die **Koordinatendarstellung** ist

$$\begin{cases} x'_1 &= a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 \\ x'_2 &= a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \end{cases} \quad (1.39)$$

2. die **Matrixdarstellung** ist

$$\vec{x}' = A \cdot x \quad (1.40)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

3. die **Vektordarstellung** ist

$$\vec{x}' = x_1 \cdot \vec{a} + x_2 \cdot \vec{b} \quad (1.42)$$

Wir berechnen also das Bild des ersten Basisvektors und schreiben den Vektor in die erste Spalte der Matrix und das Bild des zweiten Basisvektors in die zweite Spalte der Matrix.

Wir werden hauptsächlich mit der Matrixdarstellung arbeiten, da viele Eigenschaften der darstellenden Matrizen Schlussfolgerungen auf den Abbildungstyp zulassen. Darum wollen wir uns auch im nächsten Abschnitt mit ihnen ein bisschen mehr beschäftigen.

**Aufgabe 9.** Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit

1.  $(0,1)^T$  und  $(1,0)^T$  im  $\mathbb{R}^2$
2.  $(0,1,1)^T$ ,  $(1,0,0)^T$  und  $(0,1,0)^T$  im  $\mathbb{R}^3$
3.  $(0,1,1)^T$ ,  $(0,0,1)^T$  und  $(0,1,0)^T$  im  $\mathbb{R}^3$
4.  $(2,0,1,1)^T$ ,  $(3,0,0,1)^T$  und  $(0,1,0,0)^T$  im  $\mathbb{R}^4$
5.  $(1,2,3,4)^T$ ,  $(0,0,0,1)^T$ ,  $(1,0,1,0)^T$  und  $(0,1,0,0)^T$  im  $\mathbb{R}^4$
6.  $(2,0,1,1,0)^T$ ,  $(0,0,0,1,0)^T$ ,  $(1,0,0,0,0)^T$  und  $(0,0,1,0,0)^T$  im  $\mathbb{R}^5$
7.  $(1,2,4,9)^T$ ,  $(1,2,4,1)^T$  und  $(1,2,1,9)^T$  im  $\mathbb{R}^4$

**Aufgabe 10.** Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis bilden

1.  $(1,0)^T$  und  $(1,1)^T$  im  $\mathbb{R}^2$
2.  $(1,1,0)^T$ ,  $(0,1,0)^T$  und  $(1,0,0)^T$  im  $\mathbb{R}^3$
3.  $(1,1,0,1)^T$ ,  $(1,0,1,0)^T$  und  $(1,0,0,1)^T$  im  $\mathbb{R}^4$
4.  $(1,1)^T$ ,  $(0,1)^T$  und  $(1,0)^T$  im  $\mathbb{R}^2$

**Aufgabe 11.** Ergänzen Sie folgende Vektoren zu einer Basis

1.  $(1,0,0)^T$  und  $(1,1,0)^T$  im  $\mathbb{R}^2$

2.  $(1,1,0,1)^T$ ,  $(0,1,0,1)^T$  und  $(1,0,0,1)^T$  im  $\mathbb{R}^4$

3.  $(1,0,1,0)^T$  und  $(1,0,0,1)^T$  im  $\mathbb{R}^4$

**Aufgabe 12.** Zeigen Sie:

Sind die Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  Basis eines Vektorraumes  $V$ , so lässt sich jeder Vektor  $\vec{v} \in V$  eindeutig, als Linearkombination dieser Basis darstellen (Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt)

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie:

Sind die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  eine Basis im  $\mathbb{R}^2$  und  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung, dann bilden  $f(\vec{u})$  und  $f(\vec{v})$  ebenfalls eine Basis im  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 14.** Beweisen Sie Lemma 1.3.3

**Aufgabe 15.** Bestimmen Sie alle drei Darstellungsarten zu der linearen Abbildung, die die Punkte  $P(0,1)$  und  $Q(1,0)$  auf  $P'(1,0)$  und  $Q'(0,1)$  abbildet.

**Aufgabe 16.** Bestimmen Sie die Matrix - Darstellung zu den Abbildungen aus den Aufgaben 1, 2 und 3.

## 1.4 Exkurs: Matrizen

Wir wollen uns nun mit Matrizen etwas näher beschäftigen. Wir haben schon indirekt gesehen, wie man Matrizen und Vektoren multipliziert, denn es ist für

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Dies ist also nichts anderes als eine Umformung der Matrixdarstellung zu Vektordarstellung. Wir wollen nun kurz darauf eingehen, wie man Matrizen addiert und multipliziert

**Definition 1.4.1.** Seien  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , dann definieren wir

1. die *Matrixaddition* folgendermassen

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

2. sei  $r \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl dann definieren wir

$$r \cdot A = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

3. die *Matrixmultiplikation* folgendermassen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass die Menge der Matrizen mit der oben definierten Addition und Multiplikation eine besondere algebraische Struktur bilden, einen sogenannten **Ring**, dazu benötigen wir noch folgende Eigenschaften der Addition und Multiplikation

**Lemma 1.4.2.** Seien  $A, B, C$  ( $2 \times 2$ ) - Matrizen, dann gelten

1. die **Assoziativgesetze** der Addition und Multiplikation, d.h.

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (1.48)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (1.49)$$

2. das **Kommutativgesetz** der Addition, d.h.

$$A + B = B + A \quad (1.50)$$

3. die **Distributivgesetze**, d.h.

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (1.51)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1.52)$$

Wir kennen nun aus der Multiplikation der reellen Zahlen das sogenannte **neutrale Element** der Multiplikation die 1, denn es gilt  $x \cdot 1 = x$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Die Frage ist nun, ob es auch ein neutrales Element für Matrizenmultiplikation gibt. Die Antwort liefert uns

**Lemma 1.4.3.** Die Matrix  $I_2$  definiert durch  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation, d.h. es gilt für eine Matrix  $A$

$$A \cdot I = A \quad (1.53)$$

Wir wollen nun ein mächtiges Mittel kennenlernen um wichtige Eigenschaften von Matrizen herauszufinden; die Determinante. Sie ist insbesondere ein Indikator für die **Umkehrbarkeit**. Umkehrbarkeit haben wir nun schon bei linearen Abbildungen kennengelernt, wir wollen uns aber die Bedeutung wieder anhand der reellen Zahlen klar machen.

Für eine von 0 verschiedene reelle Zahl  $x$  gibt es eine Zahl  $\frac{1}{x}$ , so dass

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (1.54)$$

Wir definieren nun also analog

**Definition 1.4.4.** Eine Matrix  $A$  heisst **umkehrbar** oder **invertierbar**, wenn es eine Matrix  $B$  gibt, so dass

$$A \cdot B = I \quad (1.55)$$

wir bezeichnen dann  $B$  mit  $A^{-1}$  und heisst **Inverse**.

Nun ist der Fall aber nicht ganz so einfach wie bei den reellen Zahlen, denn es gibt nicht für alle von der Nullmatrix verschiedenen Matrizen eine Inverse. Hierfür benötigen wir die Determinante.

**Definition 1.4.5.** Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  eine  $(2 \times 2)$ -Matrix, dann definieren wir die **Determinante** von  $A$ , die wir mit  $\det(A)$  bezeichnen wollen

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1.56)$$

Wir wollen nun allgemein die Inverse für  $(2 \times 2)$ -Matrizen bestimmen. Seien  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  zwei Matrizen. Wenn  $B$  die Inverse von  $A$  sein soll, gilt folgendes

$$A \cdot B = I_2 \quad (1.57)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Wir erhalten also vier Gleichungen für vier Unbekannte, denn unbekannt sind nur die  $b_{ij}$ , es gilt dann

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \quad (1.60)$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \quad (1.61)$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \quad (1.62)$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

Aus Platzgründen wollen wir an dieser Stelle auf die Umformungsschritte verzichten, es ergibt sich dann

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot a_{22} \quad (1.65)$$

$$b_{12} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot -a_{12} \quad (1.66)$$

$$b_{21} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot -a_{21} \quad (1.67)$$

$$b_{22} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot a_{11} \quad (1.68)$$

bzw. in der Matrixform ergibt sich somit

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Man vertauscht also die Diagonalelemente und versieht die beiden anderen mit einem Minus - Zeichen. Der Faktor ist nun aber gerade die Determinante der Matrix A, also gilt

**Satz 1.4.6.** *Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist*

$$\det(A) \neq 0 \quad (1.70)$$

Wir wollen nun noch kurz eine geometrische Bedeutung der Determinante kennenlernen, bevor wir im nächsten Abschnitt eine ihrer wichtigsten Anwendungen kennenlernen.

**Definition 1.4.7.** *Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  eine Matrix, dann nennen wir A*

1. **flächeninhaltstreu**, wenn  $|\det(A)| = 1$
2. **orientierungstreu**, wenn  $\det(A) > 0$ , sonst **orientierungsumkehrend**.
3. **singulär**, wenn  $\det(A) = 0$ , sonst **regulär**

Betrachten wir nun die Bilder der Einheitsvektoren, so spannen diese im Allgemeinen nicht wieder ein Quadrat auf, aber ein Parallelogramm, das Quadrat, das die Einheitsvektoren aufspannen, heisst **Einheitsquadrat**.

Man könnte nun fragen wie sich der Flächeninhalt des Einheitsquadrates unter der linearen Abbildung ändert.

Nun wissen wir, dass für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt

$$A = a \cdot h_a \quad (1.71)$$

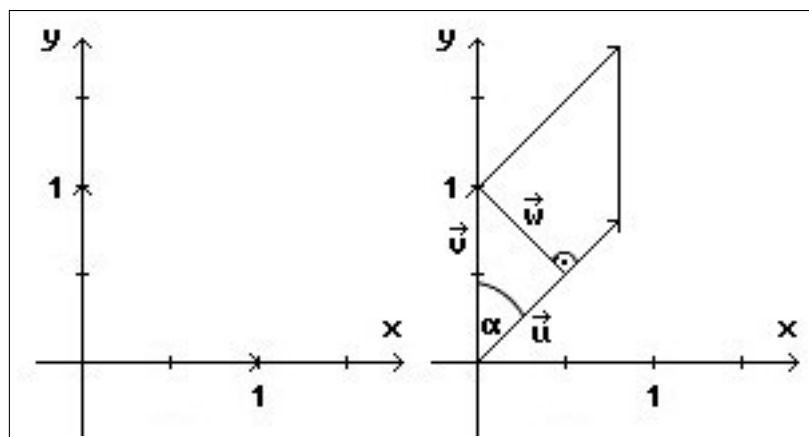


Abbildung 1.9: Das von den Bildern der Einheitsvektoren aufgespannte Parallelogramm

‘Grundseite mal Höhe’, wie man es sich einfach merken kann. In unserem Fall benötigen wir die Länge von Vektoren.

**Definition 1.4.8.**

1. Die **Länge** oder **Norm** eines Vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$  definieren wir als

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{1.72}$$

2. Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren  $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$  und  $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$  definieren wir mit  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{1.73}$$

Dass diese Definition der Länge Sinn macht, kann man anhand der Figur erkennen,

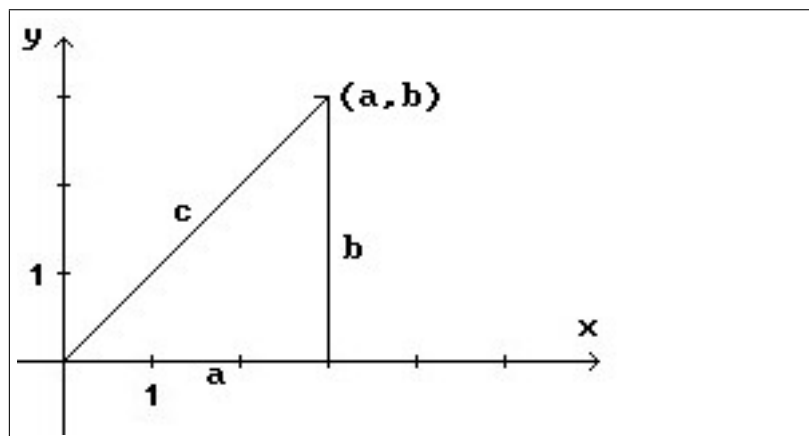


Abbildung 1.10: Länge eines Vektors

da wir die Länge des Pfeils durch den Satz des Pythagoras erhalten können. Wir wollen nun noch eine wichtige Eigenschaft zur Winkelmessung kennenlernen

**Satz 1.4.9.** Seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  zwei verschiedene Vektoren, dann gilt für den von ihnen eingeschlossenen Winkel  $\alpha$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (1.74)$$

Nun also können wir also den Flächeninhalt des Parallelogramms berechnen. Für die Höhe auf dem Vektor  $\vec{u}$  können wir die Definition des Sinus anwenden, denn es gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \quad (1.75)$$

bzw.

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \quad (1.76)$$

damit erhalten wir also insgesamt (wir quadrieren direkt um hinterher die Wurzeln zu vermeiden)

$$A^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin^2(\alpha) \quad (1.77)$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \quad (1.78)$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot -|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \cos^2(\alpha) \quad (1.79)$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \quad (1.80)$$

$$= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 \quad (1.81)$$

$$= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - (u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2) \quad (1.82)$$

$$= u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 \quad (1.83)$$

$$= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad (1.84)$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir also  $A = |u_1v_2 - u_2v_1|$ . Dies ist aber gerade die Determinante der zugehörigen Matrix, da die Bilder der Einheitsvektoren in den Spalten der Matrix stehen. Also bleibt der Flächeninhalt erhalten, wenn die Determinante der darstellenden Matrix 1 oder -1 ist.

**Aufgabe 17.** Berechnen Sie mit den Bezeichnungen der Definition 1.4., das Produkt  $B \cdot A$

**Aufgabe 18.** Beweisen Sie Lemma 1.4.2

**Aufgabe 19.** Finden Sie eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix, die nicht invertierbar ist.

**Aufgabe 20.** Führen Sie die ausgelassenen Umformungsschritte zu Invertierung einer Matrix durch und bestätigen Sie die Formel für die Inverse. Überprüfen Sie die Formel für die Inverse durch Multiplikation von  $A$  mit  $A^{-1}$ .

**Aufgabe 21.** Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Regularität und invertieren Sie sie gegebenenfalls

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 22.** Überprüfen Sie folgende Matrizen auf Orientierungs-, Flächeninhaltstreue und Regularität

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 23.** Beweisen Sie Satz 1.4.9

## 1.5 Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume

Die Theorie der Eigenwerte und Eigenräume hat viele Anwendungen in der Physik und Geometrie. Wir wollen zunächst einen einfacheren Einstieg. Uns interessiert nun folgende Problemstellung:

Gegeben ist eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , da nun die Multiplikation von  $A$  mit einem Vektor  $\vec{x}$  aufwendig ist (insbesondere dann, wenn wir grössere Matrizen betrachten), untersuchen wir, ob es Vektoren gibt, für die es eine reelle Zahl  $r \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$A \cdot \vec{x} = r \cdot \vec{x} \quad (1.85)$$

die geometrische Anschauung ist, dass die Vektoren  $\vec{x}$  auf parallele Vektoren  $\vec{x}'$  abgebildet werden. Bilden wir nun Gerade ab, so gehen diese in parallele Geraden über (diese Fragestellung wird uns im nächsten Abschnitt noch weiter beschäftigen).

Wir wollen nun versuchen, eine Formel zur Bestimmung solcher reellen Zahlen  $r$  finden, dabei gilt dann

$$A \cdot \vec{x} - r \cdot \vec{x} = 0 \quad (1.86)$$

Nun müssen wir einen kleinen Trick anwenden

$$A \cdot \vec{x} - r \cdot \vec{x} = 0 \quad (1.87)$$

$$A \cdot \vec{x} - r \cdot I_2 \cdot \vec{x} = 0 \quad (1.88)$$

$$(A - rI_2) \cdot \vec{x} = 0 \quad (1.89)$$

Nun interessieren uns aber nur die von dem Nullvektor verschiedene Vektoren, also müssen wir uns überlegen, wann die Matrix  $B = (A - rI_2)$  einen von 0 verschiedenen Vektor auf 0 abbildet.

Wir wissen aber, dass eine lineare Abbildung die 0 auf 0 abbildet. Da nun die lineare Abbildung, die zur Matrix  $B$  gehört sowohl den Nullvektor also auch den Vektor  $\vec{x}$  auf 0 abbildet, kann die Matrix nicht invertierbar sein.

Also folgt  $\det(B) = 0$

**Definition 1.5.1.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  eine  $(2 \times 2)$ -Matrix dann heisst

$$\chi_A(r) = \det(A - r \cdot I_2) \quad (1.90)$$

$$= \det \left( \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{pmatrix} \right) \quad (1.91)$$

$$= r^2 - (a_{11} + a_{22})r + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.92)$$

$$= r^2 - \text{Spur}(A)r + \det(A) \quad (1.93)$$

das **charakteristische Polynom**. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms nennt man die **Eigenwerte** der Matrix  $A$ . Ist nun  $r_0$  ein Eigenwert und  $\vec{u} \neq 0$  ein Vektor, so dass gilt

$$A\vec{u} = r_0\vec{u} \quad (1.94)$$

dann heisst  $\vec{u}$  **Eigenvektor** zum Eigenwert  $r_0$

Es ist schnell klar, dass nicht nur  $\vec{u}$ , sondern auch alle skalaren Vielfachen von  $\vec{u}$  Eigenvektoren sind

**Definition 1.5.2.** Sei  $\vec{u}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $r \in \mathbb{R}$  der Matrix  $A$ , dann heisst die Menge

$$\text{Eig}(A) = \{\vec{v}: \vec{v} = t\vec{u} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\} \quad (1.95)$$

heisst **Eigenraum** der Matrix  $A$ .

Wir wollen hierzu ein Beispiel rechnen:

Es sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dann erhalten wir

$$\chi_A(t) = t^2 - \text{Spur}(A)t + \det(A) \quad (1.96)$$

$$= t^2 - 3t + 2 \quad (1.97)$$

$$= (t-1)(t-2) \quad (1.98)$$

Also sind  $t_1 = 1$  und  $t_2 = 2$  die Eigenwerte von  $A$ , für die Eigenvektoren gilt dann

$$\boxed{t_1 = 1}$$

Es muss für einen Eigenvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$  gelten

$$(A - t_1 I_2)\vec{u} = 0 \quad (1.99)$$

$$\left( \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{u} = 0 \quad (1.100)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{u} = 0 \quad (1.101)$$

$$\begin{cases} 2u_1 - 2u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \quad (1.102)$$

Fassen wir nun die beiden Gleichungen zusammen, dann erhalten wir, dass alle Vektoren der Form  $(1,1)^T$  Eigenvektoren sind, d.h. der Eigenraum ist

$$\vec{u} = t \cdot (1,1)^T \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.103)$$

$$\boxed{t_2 = 2}$$

Es muss für einen Eigenvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$  gelten

$$(A - t_2 I_2)\vec{u} = 0 \quad (1.104)$$

$$\left( \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \vec{u} = 0 \quad (1.105)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{u} = 0 \quad (1.106)$$

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 = 0 \\ u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \quad (1.107)$$

Fassen wir nun die beiden Gleichungen zusammen, dann erhalten wir, dass alle Vektoren der Form  $(2,1)^T$  Eigenvektoren sind, d.h. der Eigenraum ist

$$\vec{u} = t \cdot (2,1)^T \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.108)$$

**Aufgabe 24.** Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3.  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$4. D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 25.** Zeigen Sie:

1. Besitzt  $A$  den Eigenwert  $r$ , dann besitzt  $A^{-1}$  den Eigenwert  $\frac{1}{r}$

2. Besitzen  $A$  und  $B$  den Eigenvektor  $\vec{u}$ , so auch das Matrizenprodukt  $A \cdot B$

**Aufgabe 26.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , dann definieren wir die sogenannte **Transponierte** von  $A$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

. Zeigen Sie:

$A$  und  $A^T$  besitzen die gleiche Determinante und die gleichen Eigenwerte.

**Aufgabe 27.** Untersuchen Sie für welche  $t \in \mathbb{R}$  die folgenden Matrizen, keinen, einen oder zwei Eigenwerte besitzt.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 3t & 2t \\ t & 3 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Klassifizierung von Linearen Abbildungen

Wir wollen uns nun überlegen, in wie weit uns die vorherigen Untersuchungen in unserem geometrischen Problemen weiterbringen. Wir werden dabei feststellen, dass wir durch die Matrix und ihre Eigenwerte eine eindeutige Klassifizierung der zugehörigen Abbildung erhalten.

Wir wollen dieses Mal das ganz andersherum angehen, wir wollen zunächst einmal folgende Tabelle betrachten und dann den Nachweis erbringen

Zwei Eigenwerte $r_1, r_2$ <b>Euler - Affinität</b>	Ein Eigenwert $r$ <b>Streckscherung</b>	Kein Eigenwert <b>Affindrehung</b>
<b>Parallelstreckung</b> $r_1 = 1$ oder $r_2 = 1$ <b>Schrägspiegelung</b> $r_1 = 1$ $r_2 = -1$	<b>Scherung</b> $r = 1$ Eigenraum eindimensional <b>zentrische Streckung</b> Eigenraum zweidimensional	

Eine Affindrehung ist die Verkettung einer Drehung um den Ursprung mit einer Streckscherung oder einer Euler - Affinität. Verkettung heisst dabei, dass man erst um den Ursprung dreht und dann eine der beiden Abbildungen anwendet.

Wir wollen uns aber nun mit einer Euler - Affinität beschäftigen.

### Parallelstreckung

Es bezeichne  $A$  die Matrix einer Parallelstreckung; eine Parallelstreckung besitzt nun eine Streckachse, die in der Figur mit  $g_2$  bezeichnet wird.

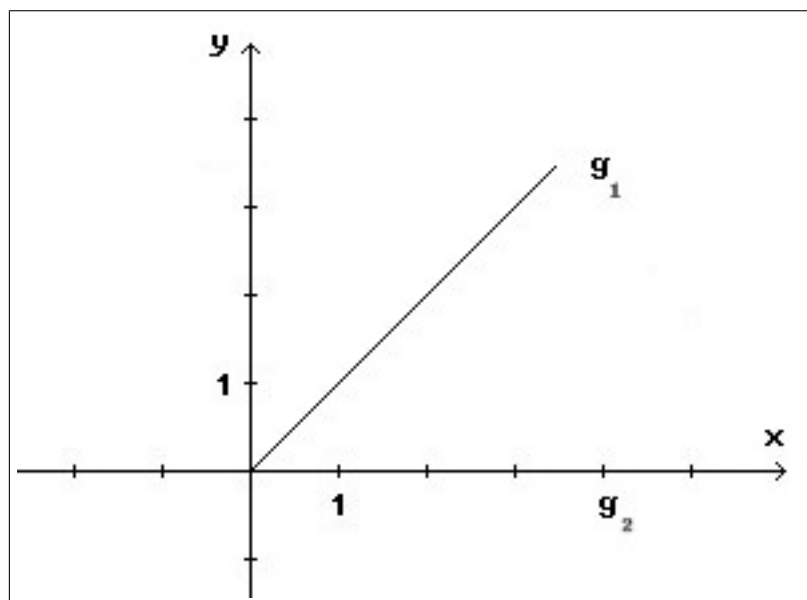


Abbildung 1.11: Parallelstreckung

Für die Ortsvektoren  $\vec{x}$  der Punkte auf  $g_2$  gilt also  $A\vec{x} = \vec{x}$ , also ist  $\vec{x}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Alle anderen Vektoren werden nun parallel zur Geraden  $g_1$  gestreckt. D.h. der Richtungsvektor der Geraden ist ebenfalls Eigenvektor mit dem Streckfaktor als Eigenwert. Also hat eine Parallelstreckung die geforderten Eigenschaften.

**Aufgabe 28.** Überprüfen Sie die Sonderfälle der Strecksscherung, d.h. zeigen Sie, dass

1. eine Scherung einen Eigenwert  $r = 1$  und einen eindimensionalen Eigenraum besitzt.
2. eine zentrische Streckung hat einen zweidimensionalen Eigenraum besitzt.

**Aufgabe 29.** Zeigen Sie, dass eine Schrägspiegelung die Eigenwerte 1 und -1 hat.

**Aufgabe 30.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Klassifizieren Sie die linearen Abbildungen, die durch Multiplikation mit den folgenden Matrizen gegeben sind

1.  $A \cdot B$
2.  $B \cdot A$
3.  $A \cdot C$
4.  $C \cdot B$

**Aufgabe 31.** Gegen sei die Abbildungsschar  $f_t: \vec{x}' = A \cdot \vec{x}$  mit  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}$ . Untersuchen Sie,

1. für welche  $t \in \mathbb{R}$  die Abbildung umkehrbar ist.
2. für welche  $t \in \mathbb{R}$   $f_t$  eine Euler - Affinität, Strecksscherung oder Affindrehung ist (falls möglich)

**Aufgabe 32.** Eine lineare Abbildung  $f$  bilde  $P(3,0)$  auf  $P'(3,3)$  und  $Q(-2,-1)$  auf  $Q'(-1,-5)$  ab

1. Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung der linearen Abbildung
2. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume und den Typ der Abbildung
3. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch, das Bild der  $y$  - Achse

## 1.7 Fixelemente

Wir wollen uns nun noch kurz mit einer wichtigen Eigenschaft von Abbildungen beschäftigen, den sogenannten **Fixpunkten**

**Definition 1.7.1.** *Es sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung, dann heisst  $m \in M$  **Fixpunkt**, wenn gilt*

$$f(m) = m \quad (1.110)$$

Wir wollen uns bei dieser Theorie allerdings auf lineare Abbildungen beschränken. Eine Fixpunkteigenschaft von linearen Abbildungen kennen wir schon, denn es gilt immer

$$f(0) = 0 \quad (1.111)$$

Wir müssen uns nun noch überlegen, wie man am besten Fixpunkte berechnet.

Es sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , dann ist

$$A \cdot x = x \quad (1.112)$$

dann ist also jeder Punkt ein Fixpunkt. Wir wollen nun noch kurz eine etwas stärkere Bedingung an Fixelemente kennenlernen

**Definition 1.7.2.** *Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung und  $g$  eine Gerade, dann heisst  $g$*

1. **Fixpunktgerade**, wenn jeder Punkt von  $g$  Fixpunkt ist.
2. **Fixgerade**, wenn für jeden Punkt  $P \in g$  auch das Bild  $P' \in G$  ist.

Fixgeraden sind alle Geraden, deren Richtungsvektoren Eigenvektoren der linearen Abbildung sind. Die Richtungsvektoren von Fixpunktgeraden sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

**Aufgabe 33.** *Zeigen Sie, dass eine lineare, umkehrbare Abbildung, die zwei Fixpunkte besitzt, schon eine ganze Fixpunktgerade besitzt.*

**Aufgabe 34.** *Bestimmen Sie alle Fixpunkte der linearen Abbildungen, die durch die folgenden Matrizen gegeben sind*

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 35.** *Untersuchen Sie, für welche  $t \in \mathbb{R}$  die Abbildungsschar keinen, einen Fixpunkt oder eine ganze Fixpunktgerade. Gib die Fixpunktgerade in Abhängigkeit von  $t$  an.*

$$f_t(x) = A \cdot x \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 3t \end{pmatrix}$$

# Index

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , 18
- $\vec{a}$ , 11
- $A^T$ , 23
- $A^{-1}$ , 16
- Abbildungen in der Ebene, 3
- Abbildungsgleichung, 3
- Abbildungsgleichung eine Achsenspiegelung, 4
- Abbildungsgleichung einer Parallelstreckung, 6
- Abbildungsgleichung einer Punktspiegelung, 4
- Abbildungsgleichung einer Scherung, 7
- Abbildungsgleichung einer Schrägspiegelung, 5
- Abbildungsgleichung einer Verschiebung, 3
- Abbildungsgleichung einer zentrischen Streckung, 5
- Abbildungsgleichung einer Drehung, 7
- Achsen Spiegelung, 4
- Additivität, 8
- affin - lineare Abbildung, 7
- Affindrehung, 24
- Affinität, 7
- analytische Geometrie, 3
- Assoziativgesetze, 15
- Basis, 11
- Bild, 8
- charakteristisches Polynom, 21
- $\det(A)$ , 16
- Determinante, 16
- Distributivgesetze, 15
- Drehung, 6
- Eigenraum, 21
- Eigenvektor, 21
- Eigenwerte, 21
- Einheitsquadrat, 17
- Erzeugendensystem, 11
- Fixgerade, 26
- Fixpunkt, 26
- Fixpunkte, 26
- Fixpunktgerade, 26
- Flächeninhalt eines Parallelogramms, 18
- flächeninhaltsstreu, 17
- geradentreu, 9
- Homogenität, 8
- Inverse, 9, 16
- inverse Abbildung, 9
- invertierbar, 16
- klassische Geometrie, 3
- Kommutativgesetze, 15
- Koordinatendarstellung, 13
- Länge, 18
- linear abhängig, 11
- linear unabhängig, 11
- Lineare Abbildung, 8
- Matrixdarstellung, 13
- Matrizen, 12
- neutrales Element, 16
- Norm, 18
- orientierungstreu, 17
- orientierungsumkehrend, 17
- Ortsvektor, 11
- parallelentreu, 9
- Parallelogramm, 17
- Parallelstreckung, 6, 24
- Pfeil, 11
- Pfeile, 3
- Punkt, 11
- Punktspiegelung, 4
- regulär, 17
- Richtungsachse, 5
- Ring, 15
- Scherung, 7, 24
- Scherungsachse, 7
- Schrägspiegelung, 5
- Schragspiegelung, 24
- singulär, 17
- Skalarprodukt, 18
- Spaltenvektor, 11
- Spiegelachse, 4

Streck - Zentrum, 5  
Streckachse, 6  
Streckfaktor, 5  
Streckscherung, 24  
Streckungen, 5

Transponierte, 23

umkehrbar, 9, 16  
Umkehrbarkeit, 16  
Urbild, 8, 10

Vektor, 11  
Vektordarstellung, 13  
Verschiebungen, 3

Zentrische Streckung, 5  
zentrische Streckung, 24