

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Abbildung</b>	<b>2</b>
1.1	Vorbereitungen . . . . .	2
1.2	Einführung . . . . .	5
1.3	Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .	7

# Kapitel 1

## Lineare Abbildung

Wir wollen uns in diesem Skript mit einer bestimmten Klasse von Abbildungen beschäftigen, den

*linearen Abbildungen.*

Wir werden zunächst die wichtigsten Begriffe aus den Kursen

*Gruppen, Körper, Vektorräume und Funktionen*

wiederholen und uns dann mit der Theorie der linearen Abbildungen auseinander setzen.

Einige Kapitel wurden mit einem \* markiert, sie sind eine Weiterführung des Stoffes sind aber nicht für das allgemeine Verständnis notwendig. Lesern, denen diese Abschnitte zu abstrakt sind, wird im empfohlen sie zunächst zu überspringen und bei einem zweiten Durcharbeiten zu studieren.

Für Verbesserungsvorschläge insbesondere für Fehler, möchte ich um eine kurze E-Mail bitten.

Diese Skript richtet sich hauptsächlich an Studierende und interessierte. Ein version für den Schulunterricht der Sekundarstufe 2 mit einem konkreteren Ansatz und einer stärkeren Schwerpunkt auf den  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1 Vorbereitungen

Wir wollen uns in diesem Abschnitt der kurzen Wiederholung der wichtigsten Begriffe und der nötigen algebraischen Strukturen zuwenden. Leser, die die Kurse *Gruppen, Körper, Vektorräume und Funktionen* vor kurzem bearbeitet haben oder ausreichend gut mit den Begriffen vertraut sind, empfehlen wir dieses Kapitel zu überspringen.

**Definition 1.1.1** Eine Menge  $G$  (genauer  $(G, \oplus)$ ) heißt **Gruppe**, wenn folgendes gilt:

(G 1)  $\oplus: G \times G \rightarrow G$  (man nennt  $\oplus$  **innere Verknüpfung** der zweistellige Verknüpfungsoperation)

(G 2)  $\oplus$  ist assoziativ, d.h. für alle beliebigen Elemente  $a, b$  und  $c$  aus  $G$  gilt:

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \quad (1.1)$$

Also spielt die Klammerung keine Rolle.

(G 3) Es existiert ein Element  $e$ , so dass für jedes Element  $a$  aus  $G$  gilt

$$e \oplus a = a \quad (1.2)$$

Dieses Element wird **neutrales Element** genannt

(G 4) Für jedes Element  $a$  aus  $G$  existiert ein Element  $a'$  so dass

$$a \oplus a' = e \quad (1.3)$$

Es existiert also zu jedem Element ein Inverses

Eine Gruppe heisst abelsch, wenn  $\oplus$  kommutativ, d.h. für beliebige Elemente  $a$  und  $b$  gilt

$$a \oplus b = b \oplus a \quad (1.4)$$

**Beispiel 1.1.2** Die Menge der ganzen Zahlen mit Addition sind eine abelsche Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ , es ist einfach die einzelnen Bedingungen nachzuprüfen darum wollen wir an dieser Stelle darauf verzichten.

Vorsicht!  $(\mathbb{N}, +)$  ist keine Gruppe, es existieren keine Inversen.

**Beispiel 1.1.3** Die Menge der Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$   $Abb_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist bezüglich  $+$  eine abelsche Gruppe. Wir definieren

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

wobei wir eigentlich unterscheiden müssten

$(f+g)$  ist das  $+$  auf  $Abb_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $f(x) + g(x)$  ist das  $+$  auf  $\mathbb{R}$ . Dies ist ein eher abstraktes Beispiel, da man im allgemeinen nicht einsieht warum  $(f+g)(x)$  extra definiert werden muss. Aber man darf hierbei nicht vergessen, dass  $f$  und  $g$  jeweils Abbildungen sind und da ist es eigentlich gar nicht mehr klar was man unter einem Ausdruck  $f+g$  verstehen soll. Wie man sieht, haben wir auch dies nicht direkt definiert, wir haben nicht gesagt wie man  $f+g$  als Abbildung verstehen soll, sondern wir haben definiert, was  $f+g$  auf den jeweiligen Werten von  $\mathbb{R}$  zu verstehen ist. Es ist an dieser Stelle auch für die späteren Kapitel wichtig, dass der Leser den Unterschied zwischen  $f$  und  $f(x)$  einsieht.

$f$  ist eine Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  wohingegen  $f(x)$  eine reelle Zahl ist.

(G 1)  $+: Abb_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times Abb_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow Abb_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist klar

(G 2) Es ist

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) \quad (1.5)$$

$$= f(x) + g(x) + h(x) \quad (1.6)$$

Dies sind nun alle reellen Zahlen, in denen das Assoziativgesetz gilt, also folgt

$$f(x) + g(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \quad (1.7)$$

$$= (f + g)(x) + h(x) \quad (1.8)$$

$$= ((f + g + h)(x)) \quad (1.9)$$

(G 3) Sei  $\mathbb{O}$  die Nullabbildung, d.h.  $\mathbb{O}(x) = 0$  für alle  $x$ , es folgt

$$(\mathbb{O} + f)(x) = \mathbb{O}(x) + f(x) \quad (1.10)$$

$$= 0 + f(x) \quad (1.11)$$

$$= f(x) \quad (1.12)$$

(G 4) Sei  $(-f)(x) = -f(x)$  es folgt

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) \quad (1.13)$$

$$= 0 \quad (1.14)$$

$$= \mathbb{O}(x) \quad (1.15)$$

(G 5) Die Kommutativität zeigt man wie die Assoziativität.

In der Gruppe haben wir nur eine innere Verknüpfung, wir betrachten nun als nächstes eine Struktur die zwei Verknüpfungen besitzt

**Definition 1.1.4** Eine Menge  $R$  besser  $(R, \oplus, \odot)$  heisst **Ring**, wenn gilt

(R 1)  $(R, \oplus)$  ist abelsche Gruppe

(R 2)  $\odot$  ist assoziativ

(R 3) Es gelten Distributivgesetze, für alle  $a, b$  und  $c$  aus  $R$  gilt

$$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c \tag{1.16}$$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c \tag{1.17}$$

(R 4) Es gibt ein Element  $\mathbf{1}$ , so dass für jedes  $a$  aus  $R$

$$\mathbf{1} \odot a = a \tag{1.18}$$

(R 5) Ein Ring heisst kommutativ, wenn  $\odot$  kommutativ ist.

**Beispiel 1.1.5** Gute Beispiele sind  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oder etwas abstrakter die Menge aller  $(n \times n)$ -Matrizen bzgl. Addition und Multiplikation von Matrizen, das sind alle quadratischen Matrizen. Dies bedeutet, dass die Menge der  $(2 \times 2)$ -Matrizen, die Menge der  $(3 \times 3)$ -Matrizen usw. jeweils einen Ring bilden.

Die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen bildet keinen Ring, da schon für 2 kein Inverses zu Multiplikation existiert.

**Definition 1.1.6** Eine Menge  $K = (K, \oplus, \odot)$  heisst **Körper** wenn gilt

(K 1)  $(K, \oplus, \odot)$  ist ein kommutativer Ring

(K 2)  $(K - \{0\}, \odot)$  ist eine abelsche Gruppe

(K 3) Für je zwei Elemente  $a$  und  $b$  aus  $K$  gilt sind  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  so folgt  $a \cdot b \neq 0$  (Nullteilerfreiheit)

**Beispiel 1.1.7**  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind Körper.

Insbesondere die Menge der  $(n \times n)$ -Matrizen ist kein Körper, da schon für  $(2 \times 2)$ -Matrizen gilt die Nullteilerfreiheit nicht mehr, denn es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

**Definition 1.1.8** Eine Menge  $V = (V, \oplus, \odot)$  heisst **Vektorraum** bzw. genauer **K-Vektorraum**, wenn gilt

(V 1)  $K$  ist ein Körper

(V 2)  $\oplus: V \times V \rightarrow V$  und  $\odot: K \times V \rightarrow V$

(V 3)  $(V, \oplus)$  ist eine abelsche Gruppe

(V 4) Sei  $\mathbf{1}$  aus  $K$ :  $\mathbf{1} \odot v = v$

(V 5) Seien  $\lambda, \mu$  aus  $K$  und  $v, w$  aus  $V$ , dann gilt

$$\lambda \odot (v \oplus w) = \lambda \odot v \oplus \lambda w \tag{1.20}$$

$$(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \oplus \mu \odot v \tag{1.21}$$

$$\lambda \cdot (\mu \odot v) = (\lambda \cdot \mu) \odot v \tag{1.22}$$

**Bemerkung 1**  $\odot$  wird oft als **skalare Multiplikation** und  $\oplus$  wird als **Vektoraddition** bezeichnet.

**Bemerkung 2** Sei  $0$  das neutrale Element der abelschen Gruppe. Man nennt  $0$  auch **Nullvektor**.

**Beispiel 1.1.9**  $K^n$  (für  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ ) sind Beispiele für Vektorräume oder etwas abstrakter ( $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), +, \cdot$ )

**Beispiel 1.1.10** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume, dann ist die Menge aller Abbildungen von  $V$  nach  $W$ ,  $\text{Abb}_K(V, W)$  ein  $K$ -Vektorraum

**Definition 1.1.11** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $U \subset V$  heisst **Untervektorraum**, wenn  $U$  mit der auf  $U$  induzierten skalaren Multiplikation und Vektoraddition ein Vektorraum ist.

Was bedeutet nun diese Definition? Wir untersuchen eine Teilmenge darauf, ob sie bezüglich der Addition und Multiplikation auf  $V$  einen Vektorraum bildet. Ist  $f: V \rightarrow V$  eine Abbildung, so versteht man unter der **auf  $U$  induzierten Abbildung**  $f|_U: U \rightarrow V$ . Es ist also die gleiche Abbildung lediglich schränken wir den Definitionsbereich ein (vgl. Kurs Funktionen)

Nun ist das Überprüfen der Vektorraumaxiome sehr langwierig und teilweise nicht einfach. Darum entwickeln wir ein einfacheres Kriterium im nächsten

**Satz 1.1.12** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, es bezeichne  $+$  und  $\cdot$ . Eine Teilmenge  $U \subset V$  ist genau dann ein Untervektorraum, wenn gilt

(U 1) Sind  $u_1$  und  $u_2$  aus  $U$   $\lambda$  aus  $K \Rightarrow u_1 + u_2$  und  $\lambda u_1$  sind aus  $U$

(U 2) Sei  $0$  der Nullvektor aus  $U \Rightarrow 0$  ist aus  $U$

Nun stellt sich die Frage, welche Menge ausreicht um alle Elemente eines Vektorraumes darstellen zu können

**Definition 1.1.13** Eine Menge  $B = (b_1 \dots b_n)$  eines Vektorraumes  $V$  heisst **Basis**, wenn sich jeder Vektor  $v$  aus  $V$  eindeutig als Linearkombination der  $b_i$  darstellen lässt.

**Beispiel 1.1.14** Es ist  $(0,1)$  und  $(1,0)$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 1.1.15** Als die **Dimension** eines Vektorraumes  $V$ ,  $\dim(V)$ , bezeichnet man die Anzahl der Basisvektoren einer beliebigen Basis.

**Beispiel 1.1.16**  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$  aber  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = 1$ .

**Definition 1.1.17** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $(v_1, \dots, v_n)$  Vektoren aus  $V$ . Die Vektoren  $v_i$  heissen **linear unabhängig**, wenn aus

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad (1.23)$$

$$= 0 \quad (1.24)$$

mit  $\lambda_i$  aus  $K$  folgt  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$ .

## 1.2 Einführung

Wir wollen uns nun mit der Definition von Linearen Abbildungen beschäftigen

**Definition 1.2.1** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über den Körper  $K$ . Sei  $F: V \rightarrow W$  eine Abbildung zwischen Vektorräumen, dann heisst  $F$  **lineare Abbildung** oder **Homomorphismus**, wenn gilt

(H 1) für alle  $v$  und  $w$  aus  $V$  gilt

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad (1.25)$$

(H 2) für alle  $v$  aus  $V$  und  $\lambda$  aus  $K$  gilt

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \quad (1.26)$$

**Bemerkung 3** Achtung wieder mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$ . Einmal sind die Operationen als Operation auf  $V$  einmal als Operation auf  $W$  zu verstehen.

**Korollar 1.2.2** Die Bedingungen (H 1) und (H 2) sind äquivalent zu:  
Für alle  $v, w$  aus  $V$  und  $\lambda, \mu$  aus  $K$  gilt:

$$f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w) \quad (1.27)$$

*Beweis*

Es ist also zu zeigen aus (H 1) und (H 2) folgt die obige Behauptung und umgekehrt:  
 $\Rightarrow$ : Nach (H 1) ist

$$f(\lambda v + \mu w) = f(\lambda v) + f(\mu w) \quad (1.28)$$

es folgt nach (H2)

$$f(\lambda v) + f(\mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w) \quad (1.29)$$

$\Leftarrow$ : (H 1) folgt mit  $\lambda = \mu = 1$  und (H 2) folgt mit  $\mu = 0$

□

Ein einfach Merksatz hierzu ist

### Eine lineare Abbildung bildet Linearkombinationen wieder auf Linearkombinationen ab

Es stellt sich nun die Frage, wie sich diese Eigenschaft Linearität gegenüber Veränderungen der Abbildung verhält, ist zum Beispiel die Summe oder Linearkombination von linearen Abbildungen wieder linear. Ist Die Verknüpfung von linearen Abbildungen wieder linear? Dies ist die Aussage des folgenden

**Satz 1.2.3** Sind  $V, W$  und  $Z$   $K$ -Vektorräume und  $G: V \rightarrow W$  sowie  $F: W \rightarrow Z$  lineare Abbildungen, so ist

$$F \circ G : V \rightarrow Z \quad (1.30)$$

ebenfalls linear

*Beweis*

Seien  $\lambda, \mu$  aus  $K$ ,  $v$  und  $w$  aus  $V$ . Es ist dann

$$(F \circ G)(\lambda v + \mu w) = F(G(\lambda v + \mu w)) \quad (1.31)$$

$$= F(G(\lambda v) + G(\mu w)) \quad (1.32)$$

$$= F(\lambda G(v) + \mu G(w)) \quad (1.33)$$

$$= F(\lambda G(v)) + F(\mu G(w)) \quad (1.34)$$

$$= \lambda F(G(v)) + \mu F(G(w)) \quad (1.35)$$

$$= \lambda(F \circ G)(v) + \mu(F \circ G)(w) \quad (1.36)$$

$$(1.37)$$

Also ist  $F \circ G$  linear

□

**Definition 1.2.4** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Es bezeichnet  $\mathbf{Hom}_K(\mathbf{V}, \mathbf{W})$  die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ .

Untersuchen wir nun ein wenig die Struktur dieses Raumes der Homomorphismen, so ergibt sich folgender

**Satz 1.2.5** Sind  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume, so ist  $\mathbf{Hom}_K(V, W) \subset \mathbf{Abb}_K(V, W)$  ein Untervektorraum.

Wir wollen uns nun einem anderen Raum zuwenden dem Raum der Matrizen.

**Satz 1.2.6** Die Menge der  $(m \times n)$ -Matrizen mit Einträgen aus  $K$   $\mathbf{Mat}(m \times n, K)$  ist ein  $K$ -Vektorraum

Dies hatten wir schon eingangs in den Vorbereitungen erwähnt. Der Beweis ist im allgemeinen klar, lediglich die Assoziativität der Matrixmultiplikation ist ein wenig kompliziert zu zeigen (vgl. hierzu den Kurs Matrizen).

Wir wollen uns nun dem Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen zuwenden. Hierzu betrachten wir einen Spezialfall in folgendem

**Lemma 1.2.7** Sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix, dann ist die Abbildung

$$F_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.38)$$

$$x \mapsto Ax \quad (1.39)$$

eine lineare Abbildung.

*Beweis*

Wie wir aus dem Kurs Matrizen wissen, gilt

$$F_A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) \quad (1.40)$$

$$= A\lambda x + A\mu y \quad (1.41)$$

$$= \lambda Ax + \mu Ay \quad (1.42)$$

$$= \lambda F_A(x) + \mu F_A(y) \quad (1.43)$$

also ist  $F_A$  linear.

□

Wir werden uns in einem späteren Kapitel dem genaueren Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen widmen.

### 1.3 Eigenschaften linearer Abbildungen

Wir haben uns im letzten Kapitel schon ein wenig mit der Eigenschaft Linearität beschäftigt. Nun wollen wir auch noch einige andere Eigenschaften und Strukturen studieren.

**Definition 1.3.1** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine Abbildung zwischen Vektorräumen, dann ist

$$\mathbf{Kern}(f) = f^{-1}(0) \quad (1.44)$$

$$= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \quad (1.45)$$

Der Kern einer Abbildung ist also die Menge aller Vektoren, die auf die 0 abgebildet werden (wobei 0 wieder der Nullvektor von  $W$  ist). Nun ist wieder die Frage, welche Struktur dieser Raum  $\mathbf{Kern}(f)$  hat. Die ist der Inhalt des folgenden

**Satz 1.3.2** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann ist  $\mathbf{Kern}(F)$  ein Untervektorraum von  $V$ .

*Beweis*

Seien  $v, w$  aus  $\text{Kern}(F)$   $\lambda, \mu$  aus  $K$ , es ist dann

$$F(\lambda v + \mu w) = F(\lambda v) + F(\mu w) \quad (1.46)$$

$$= \lambda F(v) + \mu F(w) \quad (1.47)$$

$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad (1.48)$$

$$= 0 \quad (1.49)$$

Also ist auch  $\lambda v + \mu w$  in  $\text{Kern}(F)$ , also ist  $\text{Kern}(F)$  ein Untervektorraum.

□

Wir hatten im Kurs Funktionen die Eigenschaft Injektivität kennegelernt zur Erinnerung die

**Definition 1.3.3** Eine Abbildung  $F: V \rightarrow W$  heisst **injektiv**, wenn aus  $v_1 \neq v_2$  stets  $F(v_1) \neq F(v_2)$  folgt.

Nun ist es sicherlich ziemlich beschwerlich anhand dieser Definition die Injektivität einer Abbildung zu untersuchen, dennoch bietet sich mit der zuletzt eingeführten Struktur für lineare Abbildungen ein erstaunlich mächtiges Hilfsmittel.

**Satz 1.3.4** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume und  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

$F$  ist genau dann injektiv, wenn  $\text{Kern}(F) = \{0\}$

*Beweis*

Wir haben hier wieder eine Äquivalenz vorliegen, also müssen wir auch beide Richtungen zeigen.

Es ist klar, dass der Kern einer linearen Abbildung immer zumindest die 0 enthalten muss, denn es ist

$$F(0) = F(0 \cdot 0) \quad (1.50)$$

$$= 0 \cdot F(0) \quad (1.51)$$

$$= 0 \quad (1.52)$$

$\Rightarrow$ : Wir wissen, dass  $F$  injektiv ist, wir wollen zeigen, dass dann  $\text{Kern}(F) = \{0\}$  gilt. Wir werden dies mit einer sehr eleganten Beweismethode durchführen, dem indirekten Beweis (vgl. hierzu den über Beweismethoden).

Annahme:  $\text{Kern}(F)$  enthielte einen von 0 verschiedenen Vektor  $v$ . Es ist dann  $F(v) = F(0)$  es ist aber  $v \neq 0$ , also ist  $F$  nicht injektiv. Widerspruch! Also folgt  $\text{Kern}(F) = \{0\}$

$\Leftarrow$ : Wir wissen  $\text{Kern}(F) = \{0\}$  und wir wollen zeigen, dass daraus die Injektivität folgt.

Annahme:  $F$  wäre nicht injektiv, es gibt also  $v \neq w$  aus  $V$  mit  $F(v) = F(w)$ , es folgt dann

$$F(v) - F(w) = 0 \quad (1.53)$$

$$F(v - w) = 0 \quad (1.54)$$

Also folgt  $v-w$  in  $\text{Kern}(F)$ , es ist aber  $v-w \neq 0$  Widerspruch zu  $\text{Kern}(F) = \{0\}$ .

□

Wir wollen uns nun mit einer weiteren Struktur beschäftigen. Ist  $F: V \rightarrow W$  eine Abbildung, so muss nicht jeder Vektor in  $W$  erreicht werden (vgl. Funktionen Surjektivität), darum betrachten wir folgende

**Definition 1.3.5** Seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume und sei  $F: V \rightarrow W$  eine Abbildung zwischen Vektorräumen dann ist

$$\mathbf{Bild}(F) = \{w \in W \mid \exists v \text{ mit } f(v) = w\} \quad (1.55)$$

Unter  $\text{Bild}(F)$  verstehen wir also die Menge von Vektoren im Zielbereich, die auch tatsächlich erreicht werden. Es ergibt sich nun

**Satz 1.3.6** *Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume  $F: V \rightarrow W$  eine Abbildung zwischen Vektorräumen, dann ist  $\text{Bild}(F)$  ein Untervektorraum von  $W$*

*Beweis*

Seien  $v$  und  $w$  aus  $\text{Bild}(F)$ ,  $\lambda, \mu$  aus  $K$

Wir erhalten nun auch hiermit wieder ein einfaches Mittel einer Abbildung und ihren Bildbereich zu untersuchen. Noch einmal zu Erinnerung

**Definition 1.3.7** *Eine Funktion  $f: V \rightarrow W$  heisst **surjektiv**, wenn für jedes  $w$  aus  $W$  ein  $v$  aus  $V$  existiert, so dass  $f(v) = w$ .*

Dies bedeutet, es wird tatsächlich jeder Vektor aus  $W$  erreicht, es ergibt sich dann

**Satz 1.3.8** *Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, es gilt dann*

$$F \text{ ist genau dann surjektiv wenn } \text{Bild}(F) = W$$

*Beweis*

klar

Wir wollen uns nun zum Schluss noch einem letzten Satz zuwenden, den wir auch im zweiten Teil des Kurses noch brauchen werden.

**Satz 1.3.9** *Seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung seien  $(v_1 \dots v_k)$  Vektoren aus  $V$  es folgt*

1. *Sind  $(v_1 \dots v_k)$  linear unabhängig und  $F$  injektiv, so auch  $(F(v_1) \dots F(v_k))$*

2. *Sind  $(v_1 \dots v_k)$  linear abhängig, so auch  $(F(v_1) \dots F(v_k))$*

*Beweis*

Wir zeigen 1. und überlassen den analogen 2. Beweis dem Leser.

Es ist, da  $F$  injektiv ist

$$0 = F(0) \tag{1.56}$$

$$= \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n) \tag{1.57}$$

$$= F(\lambda_1 v_1) + \dots + F(\lambda_n v_n) \tag{1.58}$$

$$= F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \tag{1.59}$$

$$\tag{1.60}$$

Da nun  $F$  injektiv ist folgt aus

$$F(0) = F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \tag{1.61}$$

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \tag{1.62}$$

Da nun die  $v_i$  linear unabhängig sind folgt  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$ , also sind auch die Bilder linear unabhängig.

Wir haben gesehen, dass das Bild einer linearen Abbildung ein Vektorraum ist und mit dem letzten Satz nun auch eine Möglichkeit eine Basis (zumindest aber eine linear unabhängige Teilmenge) zu bestimmen. Es ist nun natürlich eine Frage, wie gross dieser Bildraum ist.

**Definition 1.3.10** Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume  $F: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, dann ist

$$\mathbf{Rang(F)} = \dim(\text{Bild}(F))$$

Unter dem Rang einer linearen Abbildung verstehen wir also die Dimension des Bildes.

Wir empfehlen nun sich noch einmal die wichtigsten Begriffe (Rang, Kern, Eigenschaften linearer Abbildungen) noch einmal zu verdeutlichen! im nächsten teil des Kurses wollen wir uns mit der Übertragung dieser Begriffe auf Matrizen und den zugehörigen linearen Abbildungen betrachten.