Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Abbildungen

1.4 Eigenschaften von Matrizen

Wir haben uns im ersten Teil mit der Entwicklung verschiedener Begriffe für lineare Abbildungen und ihrer Anwendung und Bedeutung beschäftigt. Wir haben auch gesehen, dass die Rechts-Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix eine lineare Abbildung darstellt, darum wollen wir nun uns damit beschäftigen, ob und wie sich diese Begriffe nun auf Matrizen übertragen lassen.

Wir betrachten nun eine (m×n)-Matrix, d.h. eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Im Kurs Matrizen haben wir gesehen, dass diese Matrix nur mit einem (n×1)-Vektor von rechts multipliziert werden kann, wobei sich ein (m×1) Vektor ergibt. Wir können also die Abbildung F(x) = Ax als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ betrachten. Wie hängt nun der Rang dieser linearen Abbildung mit der Matrix zusammen?

Definition 1.4.1 *Sei $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$*

1. *Der Zeilenraum von A ist*
$$\boldsymbol{Z(A)} = Spann\{A_{1*}, ..., A_{m*}\}$$
2. *Der Spaltenraum von A ist*
$$\boldsymbol{S(A)} = Spann\{A_{*1}, ..., A_{*n}\}$$
3. *Der Nullraum von A ist*
$$\boldsymbol{N(A)} = \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = 0\}$$

Man nennt

$$\boldsymbol{dim(S(A))} = \boldsymbol{Rang(A)} \text{ den Rang von } A$$
$$\boldsymbol{dim(Z(A))} \text{ den Zeilenrang von } A$$
$$\boldsymbol{dim(N(A))} = \boldsymbol{Defekt(A)} \text{ den Defekt von } A$$

Der Zeilenraum wird also von den Zeilen der Matrix erzeugt, der Spaltenraum von den Spalten.
Wir wollen nun einen wichtigen Satz formulieren bevor wir auf den Zusammenhang zwischen der zugehörigen linearen Abbildung und der Matrix herstellen.

Satz 1.4.2 *Sei A aus Mat(m×n,$\mathbb{R}$), es ist dann:*

$$dim(S(A)) = dim(Z(A))$$

Der Beweis erfordert ein wesentlich fundierteres Wissen über Matrizen als wir bisher besitzen, darum wollen wir ihn an dieser Stelle weglassen.

Wir hatten im ersten Teil den Rang einer linearen Abbildung, als Dimension des Bildes definiert. Nun stellt sich die Frage wie sich aus den Eigenschaften ein Matrix, die Dimension des Bildes ergibt, dies folgt aus dem

Satz 1.4.3 *Sei A aus Mat(m×n,$\mathbb{R}$) und sei F(x) = Ax die zugehörige lineare Abbildung. Es ist dann*

$$Rang(A) = Rang(F) \tag{1.1}$$

Beweis

Der Beweis ist aber klar, denn die Menge der linear unabhängigen Spalten bildet eine Basis des Bildes der linearen Abbildung, die Dimension dieser Basis ist Rang(A), es folgt die Behauptung

□

Ähnlich folgt

Korollar 1.4.4 *Sei A aus Mat(m×n,$\mathbb{R}$) und sei F(x) = Ax die zugehörige lineare Abbildung. Es ist dann*

$$Kern(A) = Kern(F) \tag{1.2}$$

Wir haben nun gesehen, dass sich alle Begriffe, die wir für lineare Abbildungen entwickelt haben, auch auf Matrizen übertragen lassen. Wir wollen nun im nächsten Kapitel diese Anzeichen etwas untersuchen.

1.5 Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Wir haben nun gesehen, dass sich alle Begriffe, die wir für lineare Abbildungen entwickelt haben, sich nahtlos auf Matrizen übertragen lassen. Es stellt sich nun die Frage, in wie weit denn nun lineare Abbildungen mit Matrizen zusammenhängen.

Wir betrachten nun einen relativ konkreten Fall:
Sei F eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Wir haben gesehen, dass zu einer (m×n)-Matrix solch eine lienare Abbildung gehört. Nun wollen wir untersuchen, ob es auch für die andere Richtung eine Möglichkeit gibt, d.h. wir möchten gerne eine beliebige lineare Abbildung durch eine Matrix ausdrücken. Wir hätten dann ein sehr abstraktes Gebilde durch ein sehr einfach ausgedrückt, mit dem man konkret rechnen kann. Dazu stellen wir folgende Überlegungen an:

- Jeder Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Standardbasis E = $(e_1...e_n)$ darstellen
- Ebenso jeder Vektor aus dem $\mathbb{R}^m$ eindeutig durch E' = $(e_1...e_m)$
- Wir haben im ersten Teil gesehen, dass für eine injektive lineare Abbildung das Bild von E wieder linear unabhängig ist.

Es folgt also insgesamt, betrachten wir die Bilder der Vektoren der Standardbasis, so erhalten wir unter den Bildern eine maximal linear unabhängige Menge, da die Vektoren jeder anderen Menge sich aus diesen erzeugen lässt. Dies folgt aus der Linearität von F.
Dem Leser sei hierzu einmal das Rechnen an einem Beispiel empfohlen, woran man dies erkennen kann

Beispiel 1.5.1 *F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ F(x,y) = (2x,2y)*

Wir betrachten nun den folgenden Satz und zeigen dann das Verfahren an einem Beispiel

Satz 1.5.2 *Sei F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, seien E und E' wie oben definiert, es folgt, es existiert genau eine (m×n) - Matrix A = (a_{ij}), so dass gilt*

$$F(x) = Ax \qquad \textit{für all x aus } \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

Weiter gilt

$$F(e_j) = \sum i = 1^m a_{ij} e_i \qquad \textit{j=1...n} \tag{1.4}$$

Beweis

Die Existenz ist klar, wir nehmen einfach (1.3) als definierende Gleichung. Die Eindeutigkeit der a_{ij} folgt daraus, dass E' eine Basis ist.

□

Wir betrachten nun nun eine lineare Abbildung F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sei x = $(x_1, ..., x_n)$ aus $\mathbb{R}^n$. Es ist also x = $x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Es ist dann wegen der Linearität von F

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1e_1 + ... + x_ne_n) && (1.5)\\ &= F(x_1e_1) + ... + F(x_ne_n) && (1.6)\\ &= x_1F(e_1) + ... + x_nF(e_n) && (1.7)\\ &= x_1(a_{11}e_1 + ... + a_{m1}e_m) + ... + x_n(a_{1n}e_1 + ... + a_{mn}e_m) && (1.8) \end{aligned}$$

Da nun e$_i$ nur an der i-ten Stelle eine 1 hat und sonst nur Nullen, ist zum Beispiel

$$a_{11}e_1 + ... + a_{m1}e_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Es folgt also

$$x_1(a_{11}e_1 + ... + a_{m1}e_m) + ... + x_n(a_{1n}e_1 + ... + a_{mn}e_m) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Wie wir nun aber aus dem Kurs Matrizen wissen ist dies nichts anderes als Ax, wobei a_{ij} die Einträge, die aus Gleichung (1.) folgen, sind. Es gilt folgender Merkspruch

In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren

Für die Matrix A schreiben wir

$$A = Mat(F)$$

Beispiel 1.5.3 *Betrachten wir folgende lineare Abbildung F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (x,y)$\mapsto$(x+y,y,x), so ergibt sich folgende darstellende Matrix Es ist*

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

es folgt also

$$Mat(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

1.6 Lineare Abbildungen in allgemeine Vektorräume ∗

Im letzten Kapitel haben wir eine Möglichkeit entwickelt lineare Abbildungen durch Matrizen darzustellen. Nun stellt sich die rage, ob man dies nicht noch ein wenig verallgemeinern kann. Der Einfachkeit halber haben wir die darstellende Matrix immer bezüglich der Standardbasis betrachtet. Warum nun also nicht eine beliebige Basis nutzen oder gar beliebige Vektorräume betrachten.

Satz 1.6.1 *Seien V, W K-Vektorräume F: $V \to W$ eine lineare Abbildung, $B = (b_1 ... b_n)$ eine Basis von V und $C = (c_1 ... c_n)$ eine Basis von W dann gibt es genau eine ($m \times n$)-Matrix A, so dass für jedes v aus V*

$$F(v) = Av \tag{1.13}$$

gilt und

$$F(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j \tag{1.14}$$

Der Beweis ist genau der gleich wie im letzten Kapitel. Wir haben also nun für jede lineare Abbildung eine Darstellung als Matrix ermöglicht. Wir bezeichne nun etwas genauer A = $\mathrm{Mat}_C^B(\mathrm{F})$, ob steht die Startbasis und die Zielbasis.
Wir wollen nun noch einige wichtige Sätze zusammenstellen. Es seien im folgenden V und W K-Vektorräume B eine Basis von V und C eine Basis von W.

Satz 1.6.2 *Sei U ein K-Vektorraum mit der Basis A F: $U \to V$ und G: $V \to W$ eine lineare Abbildung dann ist*

$$Mat_C^A(F \circ G) = Mat_B^A(F) \cdot Mat_C^B(G) \tag{1.15}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser, er ist im wesentlichen nur Hinschreiben der Definitionen der rechten und linken Seite.
Ein weiterer Satz der mit Hilfe des vorhergehenden folgt ist

Satz 1.6.3 *Sei F: $V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung, ein Isomorphismus, es ist dann*

$$Mat_B^B(F^{-1}) = Mat_B^B(F)^{-1} \tag{1.16}$$

Beweis

Wir wissen zum einem

$$Mat_B^B(F \circ F^{-1}) = Mat_B^B(id_V) \tag{1.17}$$
$$= I_n \tag{1.18}$$

zum anderen folgt aus dem vorhergehenden Satz

$$Mat_B^B(F \circ F^{-1}) = Mat_B^B(F) Mat_B^B(F^{-1}) \tag{1.19}$$

durch Verbinden der beiden Gleichungen folgt die Behauptung

□

In einem späteren Teil wollen wir uns dann einem noch allgemeinerem Fall zuwenden, in dem wir die Matrix einer linearen Selbstabbildung, also eineer linearen Abbildung von einem Vektorraum in denselben wieder, bzgl zwei verschiedener Basen betrachten.

1.7 Endomophismen

Wir wollen uns nun mit einer bestimmten Klasse von Homomorphismen (linearen Abbildungen) beschäftigen und betrachten hierzu folgende

Definition 1.7.1 *Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ heisst*

1. *Homomorphismus*

2. *Monomorphismus, wenn F injektiv ist*
3. *Epimorphismus, wenn F surjektiv ist*
4. *Isomorphismus, wenn F bijektiv ist*
5. *Endomorphismus, wenn $V = W$ ist.*

Wie der Name schon sagt, wollen wir uns mit Endomorphismen in diesem Kapitel beschäftigen.

Satz 1.7.2 *Betrachten wir Mat_B^B als einen Operator bzw. als lineare Abbildung*

$$Mat_B^B : Hom_K(V, W) \quad \rightarrow \quad Mat(m \times n, K) \tag{1.20}$$

so ist dies ein Isomorphismus von Vektorräumen

Beweis

Der Beweis ist klar es folgt, aus der Tatsache, dass für jede lineare Abbildung genau eine Matrix bzgl. der Basis B existiert

□

Wir haben nun schon im vorherigen Kapitel die Idee entwickelt, wie sich etwas an einer linearen Abbildung bzw. an der darstellenden Matrix, wenn wir nicht zweimal die gleiche Basis als Start und Zielbasis wählen, dies wollen wir aber noch nicht untersuchen, sondern ein anderes einleitendes Thema.
Zuvor haben wir gesehen, dass ein Vektor v = $(v_1...v_n)$ als Linerakombination der Standardbasis darstellbar ist. Wir wollen dies nun aber ein wenig verallgemeinern.

Definition 1.7.3 *Sei $B = (b_1, .., b_n)$ eine geordnete Basis von V. Das zu B gehörende Koordinatensystem ist die Abbildung*

$$\Phi_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

mit

$$\Phi_B(x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_nb_n) = (x_1, ..x_n)^T$$

Die x_i heissen die Koordinaten von des Vektors b zur Basis B

Satz 1.7.4 Φ_B *ist eine Vektorraum-Isomorphismus*

Beweis

Wohldefiniertheit, Linearität und Bijektivität sind klar, dennoch empfehlen wir dem Leser sich dies einmal kurz schriftlich vor Augen zu führen.

Also folgt, jeder n-dimensionale K-Vektorraum ist isomorph zu dem K^n. D.h. er ist im grunde nichts anderes nur ist es eine andere Bezeichnung.

Wir wollen nun zunächst einmal ein Lemma betrachten um den folgenden Satz etwas einfacher beweisen zu können.

Lemma 1.7.5 *Sei F: V→ W eine lineare Abbildung.*
F ist genau dann surjektiv, wenn dim(Bild(F)) = dim(V) - dim(Kern(F))

Dies ist klar, denn betrachten wir eine Basis von Kern(F) erweitern dies zu einer Basis von V, so bildet die Erweiterung eine Basis von Bild(F), da die anderen Vektoren auf 0 abgebildet werden. Bild(F) = W gilt also genau dann wenn die obige Bedingung gilt.

Satz 1.7.6 *Sei F: V→V ein Endomorphismus, dann sind folgende Aussagen äquivalent*

1. *F ist injektiv*
2. *F ist surjektiv*
3. *F ist bijektiv*

Beweis

Wir zeigen die Äquivalenz von 1. und 2. die Äquivalenz zu 3. folgt dann sofort, da F genau dann bijektiv ist, wenn F injektiv und surjektiv
1. $\Rightarrow$ 2.:
Da F injektiv ist, ist Kern(F) = 0 also dim(Kern(F)) = 0 es folgt dim(Bild(F)) = dim(V), also ist F surjektiv.
2. $\Rightarrow$ 1.:
Da F surjektiv ist, ist dim(Bild(F)) = dim(V) und somit folgt wieder mit dem vorhergehendem Lemma dim(Kern(F)) = 0 und somit Kern(F) = 0

□