10.Potenzen

10.1 Definition einer Potenz mit natürlichen Exponenten

Eine Potenz an ist eine abkürzende Schreibweise
für die Multiplikation gleicher Faktoren:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal der Faktor a}}$$

mit: $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

- Die Zahl a nennt man Basis (der Potenz)
- Die Zahl n nennt man Exponenten (der Potenz)
- a^n nennt man den Potenzwert (oder kurz "Potenz")
- Sonderfall: $a^1=a$

10.2 Definition: Potenz mit negativen ganzen Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$a \in \mathbb{R}^*$ und $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

10.3 Definition einer Potenz mit rationalen Exponenten

$$a^q = a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \qquad \text{mit: } a \in \mathbb{R}_+^* \quad q \in \mathbb{Q}$$

$a \neq 0$ weil: $0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{0} = \textit{nicht}$ definiert

$q \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ Beispiel: $3^{-0.4} = 3^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}}$

10.4 Sonderfälle

- $0^0 =$ nicht definiert!
- $1^n = 1$
- $0^n = 0$ mit: $n \neq 0$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ mit: $a \neq 0$

10.5 Potenzgesetze für natürliche Exponenten

- **Potenzgesetz 1a:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- **Potenzgesetz 1b:**

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{wenn: } m>n \\ 1 & \text{wenn: } m=n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{wenn: } m<n \end{cases} \qquad \boxed{\text{mit: } a \neq 0}$$

- **Potenzgesetz 2a:**

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

- **Potenzgesetz 2b:**

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \boxed{\text{mit: } b \neq 0}$$

- **Potenzgesetz 3:**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Definitionsbereich der Potenzgesetze für natürliche Exponenten

$$\boxed{m,n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow \quad a,b \in \mathbb{R}}$$

10.6 Potenzgesetze für ganze und reelle Exponenten

- **Potenzgesetz 1a:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- **Potenzgesetz 1b:**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- **Potenzgesetz 2a:**

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

- **Potenzgesetz 2b:**

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- **Potenzgesetz 3:**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Definitionsbereich der Potenzgesetze für **ganze Exponenten** :

$$m, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a, b \in \mathbb{R}^*$$

Anmerkung:
Die Einschränkung $a,b \neq 0$ ist aus zwei Gründen nötig:
0^0 = nicht definiert
$0^{-n} = 1/0^n = 1/0$ = nicht definiert (Division durch Null)

Definitionsbereich der Potenzgesetze für **reelle Exponenten**

$$m, n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

Die Einschränkung $a,b>0$ ist nötig, weil Potenzen mit Exponenten aus R als Wurzeln definiert sind, und der Radikand einer Wurzel darf nie negativ sein.