

## 22. Quadratische Gleichungen

### 22.1 Definition einer quadratischen Gleichung

Bei einer quadratischen Gleichung kommt  $x$  in der 2. Potenz vor, aber in keiner höheren Potenz.

$ax^2$	+	$bx$	+	$c$	= 0
Quadratisches Glied		Lineares Glied		Absolutes Glied	

- $x$  ist die Unbekannte (die gesuchte Variable)
- $a, b, c$  sind Konstanten (Formvariablen)
- $a \in \mathbb{R}^*$  (d.h.  $a \neq 0$ )
- $b, c \in \mathbb{R}$  (d.h.  $b$  und  $c$  dürfen Null sein)

### 22.2 Unterteilung der quadratischen Gleichungen

Name	Schreibweise	Beispiel	Erkennungszeichen dieser Form
Gemischtquadratische Gleichung in Allgmeinform	$ax^2+bx+c=0$	$5x^2+4x+7=0$	Die Gleichung hat ein quadratisches Glied, ein lineares Glied und ein Absolutglied
Gemischtquadratische Gleichung in Normalform	$x^2+bx+c=0$	$x^2+4x+7=0$	Unterschied gegenüber der allgemeinen Form: Der Koeffizient $a$ des quadratischen Gliedes ist 1. Man erhält die Normalform aus der allg. Form, indem man die allgemeine Form durch $a$ teilt (d.h durch den Koeffizienten des quadrat. Gliedes)
Gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied	$ax^2+bx=0$	$5x^2+9x=0$	Das absolute Glied fehlt
Reinquadratische Gleichung	$ax^2+ c = 0$	$3x^2+ 9 = 0$	Das lineare Glied fehlt

### 22.3 Besondere Erscheinungsformen einer Quadrat. Gleichung

Name	Schreibweise	Beispiel	Erkennungszeichen dieser Form
Faktorierte Form	$(x-a) \cdot (x-b)=0$	$(x-5) \cdot (x+7) = 0$	Gleichung liegt in Produktform
Faktorierte Form Spezialfall: Binom	$(x-a)^2 = 0$	$(x-3)^2 = 0$	<u>Spezialfall des vorigen Falles:</u> Die Faktoren (Klammern) sind gleich.
Produkt das gleich einer Konstanten ist	$(x-a) \cdot (x-b)=c$	$(x-5) \cdot (x+7) = 10$	
Binom das gleich einer Konstanten ist	$(x-a)^2 = c$	$(x-5)^2 = 10$	<u>Spezialfall des vorigen Falles:</u> In der Gleichung kommt das 1. oder 2. Binom vor, das gleich einer Konstante $c$ ist.

## 22. Quadratische Gleichungen

---

### 22.4 Die Allgemeine Lösungsformel

Die Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hat die Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Je nach Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$  gilt:

Ist  $D > 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat zwei reelle Lösungen.

Ist  $D = 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat eine reelle Lösung  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Ist  $D < 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

### 22.5 Die p-q-Formel

Die Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

Hat die Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Je nach Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  gilt:

Ist  $D > 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat zwei reelle Lösungen.

Ist  $D = 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat eine reelle Lösung  $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$

Ist  $D < 0 \Rightarrow$  Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

## 22. Quadratische Gleichungen

---

### 22.6 Der Satz von Vieta

Gegeben sei eine quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

Die Gleichung sei in  $\mathbb{R}$  lösbar, und ihre Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  seien bekannt.

Dann erhält man die Koeffizienten  $p$  und  $q$  der Gleichung durch die beiden Formeln:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

### 22.7 Teilbarkeit durch Linearfaktor

Gegeben sei die quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Die Gleichung sei lösbar in  $\mathbb{R}$ , und die Lösungen nennen wir:  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

## 22. Quadratische Gleichungen

### 22.8 Übersicht Lösungsmethoden

Name der Form	Formel	Lösungsmethode	Beispiel
Gemischt-quadratische Gleichung in Allgemeinform	$ax^2+bx+c=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Allg.Lösungsformel anwenden.</li> </ul> <p>Alternativ möglich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Durch a teilen und dann die p-q-Formel anwenden.</li> </ul> <p>Umständlich aber möglich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Quadratische Ergänzung</li> </ul>	siehe unter allg. Lösungsformel
Gemischt-quadratische Gleichung in Normalform	$x^2+bx+c=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>p-q-Formel anwenden</li> </ul> <p>umständlich aber möglich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Quadratische Ergänzung</li> </ul>	siehe unter p-q-Formel
Gemischt-quadratische Gleichung ohne Absolutglied	$ax^2+bx=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gleichung durch a teilen</li> <li>x ausklammern</li> <li>Die 1. Lösung ist Null.</li> <li>Die 2. Lösung erhält man durch Nullsetzen der Klammer</li> </ul>	$4x^2-8x=0$ $x^2-2x=0$ $x(x-2)=0$ <b>L={0,2}</b>
Reinquadratische Form	$ax^2+ c = 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>c auf die linke Seite bringen,</li> <li>Gleichung durch a teilen</li> <li>Wurzel ziehen</li> <li>Betragsgleichung lösen</li> </ul>	$3x^2-12=0$ $3x^2=12$ $x^2=4$ $\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$ $ x =2$ <b>L={+2,-2}</b>
Faktorierte Form	$(x-a)\cdot(x-b)=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die beiden Lösungen heißen a und b</li> </ul>	$(x-5)\cdot(x+7)=0$ $(x-5)\cdot(x-(-7))=0$ <b>L={5,-7}</b>
Faktorierte Form Spezialfall: Binom	$(x-a)^2=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Lösung heißt a</li> </ul>	$(x-9)^2=0$ <b>L={9}</b>
Produkt das gleich einer Konstanten ist	$(x-a)\cdot(x-b)=c$ oder : $d(x-a)\cdot(x-b)=c$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Durch d teilen, falls <math>d \neq 1</math></li> <li>Klammern ausmultiplizieren und gleiche Glieder zusammenfassen</li> <li>Alle Summanden auf eine Seite bringen</li> <li>Dann erneut die passende Lösungsmethode wählen</li> </ul>	$2\cdot(x+2)\cdot(x+3)=10$ <u>Gleichung durch 2 teilen:</u> $(x+2)\cdot(x+3)=5$ <u>Klammern ausmultiplizieren:</u> $x^2+3x+2x+6=5$ <u>Gleiche Glieder zusammenfassen:</u> $x^2+5x+6=5$ <u>Alle Summanden auf eine Seite:</u> $x^2+5x+1=0$ <u>Die Gl. mit p-q-Formel lösen</u>
Binom das gleich einer Konstanten ist	$(x-a)^2=c$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Wurzel ziehen</li> </ul>	$(x-3)^2=16$ <u>Wurzel ziehen:</u> $ x-3 =4$ <u>Betragsgleichung lösen:</u> $x-3=4$ oder $x-3=-4$ <b>L={-1,7}</b>
Weitere Fälle:	zum Beispiel: $(x-a)\cdot(x-b)=cx^2-dx-e$	<ul style="list-style-type: none"> <li>In der Regel zuerst alle Klammern ausmultiplizieren, dann alle Glieder auf eine Seite bringen, dann die entsprechenden Glieder addieren</li> </ul>	...