Übungen

Symmetrie

Thematisch geordnete Aufgaben
mit ausführlichem Lösungsweg

Vorab-Testversion vom 8.04.2007 / 17.00h

Übungen zum Kurs Symmetrie

1.Die folgenden Funktionen sind entweder ursprungssymmetrisch zum Ursprung oder achsensymmetrisch zur y–Achse. Beweise dies rechnerisch:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$

b) $f(x) = x^8 - 3x^6 + 1$

c) $f(x) = 2x^5 + 3x^7$

d) $f(x) = 4x^6 + 7x^4 + 5$

e) $f(x) = 3x^9 + 3x$

f) $f(x) = 7x^5 + 2x^3$

g) $f(x) = e^x + e^{-x}$

h) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

2.Beweise, dass die angegebene Achse eine Symmetrieachse ist:

a)	$f(x) = 3x^2 - 6x + 3$	Achse: $x_0 = 1$
b)	$f(x) = 3x^2 + 24x + 48$	Achse: $x_0 = -4$
c)	$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 8x + 8}$	Achse: $x_0 = 2$
d)	$f(x) = \frac{5}{3x^2 - 6x + 3}$	Achse: $x_0 = 1$
e)	$f(x) = e^{x^2 - 6x}$	Achse: $x_0 = 3$
f)	$f(x) = \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}}$	Achse: $x_0 = 1$

Übungen zum Kurs Symmetrie

3.Beweise, dass der angegebene Punkt ein Symmetriepunkt ist:

Man kann diese Aufgaben mit zwei verschiedenen Formeln lösen.
Es sind jeweils die Lösungswege für beide Formeln angegeben.

a) $f(x)=\frac{2x-5}{x-3}$ $\quad P(3,2)$

b) $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ $\quad P(-1,1)$

c) $f(x)=\frac{4x-3}{x-1}$ $\quad P(1,4)$

---

d) $f(x)=\frac{e^x+e}{e^x-e}$ $\quad P(1,0)$

e) $f(x)=\frac{e^x+e^2}{e^x-e^2}$ $\quad P(2,0)$

f) $f(x)=\frac{8e^3}{e^x+e^3}$ $\quad P(3,4)$

---

g) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^7}$ $\quad P\left(7,\frac{1}{2}\right)$

h) $f(x)=\frac{10e^x}{e^x+e}$ $\quad P(1,5)$

i) $f(x)=\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+e^4}$ $\quad P(2,3)$

---

j) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ $\quad P(1,2)$

k) $f(x)=x^3-9x^2+27x-26$ $\quad P(3,1)$

L) $f(x)=x^3+3x^2+3x-2$ $\quad P(-1,-3)$

Übungen zum Kurs Symmetrie

4. Beweise, dass die folgenden Funktionenscharen (a und b sind Parameter) zum gegebenen Punkt P symmetrisch sind:

a)	$f(x)=\dfrac{e^x+a}{e^x-a}$	$P\left(\ln a,0\right)$
b)	$f(x)=\dfrac{b}{e^x+a}$	$P\left(\ln a,\dfrac{b}{2a}\right)$
c)	$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+a}$	$P\left(\ln a,\dfrac{1}{2}\right)$
d)	$f(x)=\dfrac{be^x}{e^x+a}$	$P\left(\ln a,\dfrac{b}{2}\right)$
e)	$f(x)=\dfrac{be^{2x}}{e^{2x}+a}$	$P\left(\dfrac{\ln a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

Lösung zu 1a

Gegeben:

$$\boxed{f(x) = x^4 + 3x^2 - 2}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 2}$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammern weg:

$$\boxed{f(-x) = x^4 + 3x^2 - 2}$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt.

Wir ersetzen daher die rechte Seite der Gleichung durch den Ausdruck $f(x)$:

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Lösung zu 1b

Gegeben:

$$\boxed{f(x)=x^8-3x^6+1}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$*:*

$$\boxed{f(-x)=(-x)^8-3(-x)^6+1}$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammer weg:

$$\boxed{f(-x)=x^8-3x^6+1}$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ *übereinstimmt:*

$$\boxed{f(-x)=f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls gerade
(=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Lösung zu 1c

Gegeben:

$$\boxed{f(x) = 2x^5 + 3x^7}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x) = 2(-x)^5 + 3(-x)^7}$$

Beide Potenzen haben ungerade Exponenten, und für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$\boxed{f(-x) = 2\left(-x^5\right) + 3\left(-x^7\right)}$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$\boxed{f(-x) = -2x^5 - 3x^7}$$

Wir klammern –1 aus:

$$\boxed{f(-x) = -\left(2x^5 + 3x^7\right)}$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls ungerade (=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Lösung zu 1d

Gegeben:

$$\boxed{f(x) = 4x^6 + 7x^4 + 5}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x) = 4(-x)^6 + 7(-x)^4 + 5}$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammer weg :

$$\boxed{f(-x) = 4x^6 + 7x^4 + 5}$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ *übereinstimmt :*

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls gerade
(=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Lösung zu 1e

Gegeben:

$$f(x) = 3x^9 + 3x$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = 3(-x)^9 + 3(-x)$$

Die Potenz $(-x)^9$ *hat einen ungeraden Exponenten*

Für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$f(-x) = 3(-x^9) + 3(-x)$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$f(-x) = -3x^9 - 3x$$

Wir klammern –1 aus:

$$f(-x) = -(3x^9 + 3x)$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ *übereinstimmt. Wir ersetzen also die Klammer durch den Ausdruck* $f(x)$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls ungerade (=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Lösung zu 1f

Gegeben:

$$\boxed{f(x) = 7x^5 + 2x^3}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x) = 7(-x)^5 + 2(-x)^3}$$

Beide Potenzen haben einen ungeraden Exponenten.

Für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$\boxed{f(-x) = 7\left(-x^5\right) + 2\left(-x^3\right)}$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$\boxed{f(-x) = -7x^5 - 2x^3}$$

Wir klammern –1 aus:

$$\boxed{f(-x) = -\left(7x^5 + 2x^3\right)}$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ *übereinstimmt. Wir ersetzen also die Klammer durch den Ausdruck* $f(x)$:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls ungerade
(=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Lösung zu 1g

Gegeben:

$$\boxed{f(x) = e^{x} + e^{-x}}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)}}$$

Die beiden negativen Vorzeichen heben sich auf:

$$\boxed{f(-x) = e^{-x} + e^{x}}$$

Vergleicht man die rechte Seite der Gleichung mit der ursprünglichen Gleichung, so sieht man, dass die rechte Seite f(x) entspricht. Wir ersetzen daher die rechte Seite durch den Ausdruck f(x):

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für eine gerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Lösung zu 1h

Gegeben:

$$\boxed{f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$\boxed{f(-x)=\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}}$$

Definition negativer Exponenten anwenden:

$$\boxed{f(-x)=\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}}$$

Im Zähler und im Nenner jeweils auf den Hauptnenner bringen:

$$\boxed{f(-x)=\frac{\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}}=\frac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}}}$$

Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren):

$$\boxed{f(-x)=\frac{1+e^x}{e^x}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}}$$

Auf einen Buchstrich bringen:

$$\boxed{f(-x)=\frac{\left(1+e^x\right)e^x}{e^x\left(1-e^x\right)}}$$

Kürze e^x:

$$\boxed{f(-x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}}$$

Im Nenner -1 ausklammern:

$$\boxed{f(-x)=\frac{1+e^x}{-\left(e^x-1\right)}}$$

Minuszeichen vor den Bruchziehen:

$$\boxed{f(-x)=-\frac{e^x+1}{e^x-1}}$$

Der Bruch entspricht $f(x)$:

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.
Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls ungerade (= punktsymmetrisch zum Ursprung).

Lösung zu 1i

Gegeben:

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen f(–x):

$$\boxed{f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{e^{-x}-e^{-(-x)}}}$$

Vorzeichen vereinfachen:

$$\boxed{f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}}}$$

Im Nenner –1 ausklammern, im Zähler Reihenfolge verändern (Kommutativgesetz anwenden):

$$\boxed{f(-x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{-\left(e^{x}-e^{-x}\right)}}$$

Das "Minus" vor der Klammer vor den Bruch schreiben *:*

$$\boxed{f(-x)=-\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}}$$

Der Bruch entspricht f(x), daher den Bruch durch den Ausdruck f(x) ersetzen *:*

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebensfalls ungerade (= punktsymmetrisch zum Ursprung).

Lösung zu 2a

Gegeben:

$f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ und $x_0 = 1$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.
Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x) &= 3(1+x)^2 - 6(1+x) + 3 \\ &= 3(1+2x+x^2) - 6 - 6x + 3 \\ &= 3 + 6x + 3x^2 - 6 - 6x + 3 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1-x) &= 3(1-x)^2 - 6(1-x) + 3 \\ &= 3(1-2x+x^2) - 6 + 6x + 3 \\ &= 3 - 6x + 3x^2 - 6 + 6x + 3 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 3 &= 3(2\cdot 1 - x)^2 - 6(2\cdot 1 - x) + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3(2 - x)^2 - 6(2 - x) + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3(4 - 4x + x)^2 - 12 + 6x + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 12 - 12x + 3x^2 - 12 + 6x + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Lösung zu 2b

Gegeben:

$f(x) = 3x^2 + 24x + 48$ und $x_0 = -4$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.
Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(-4+x) &= 3(-4+x)^2 + 24(-4+x) + 48 \\ &= 3\left(16 - 8x + x^2\right) - 96 + 24x + 48 \\ &= 48 - 24x + 3x^2 - 96 + 24x + 48 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-4-x) &= 3(-4-x)^2 + 24(-4-x) + 48 \\ &= 3\left(16 + 8x + x^2\right) - 96 - 24x + 48 \\ &= 48 + 24x + 3x^2 - 96 - 24x + 48 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = -4$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 24x + 48 &= 3\left(2\cdot(-4) - x\right)^2 + 24\left(2\cdot(-4) - x\right) + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3(-8 - x)^2 + 24(-8 - x) + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3\left(64 + 16x + x^2\right) - 192 - 24x + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 192 + 48x + 3x^2 - 192 - 24x + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3x^2 + 24x + 48 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = -4$ bewiesen.

Lösung zu 2c

Gegeben:

$f(x) = \dfrac{3}{2x^2 - 8x + 8}$ und $x_0 = 2$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.
Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(2+x) &= \frac{3}{2(2+x)^2 - 8(2+x) + 8} \\ &= \frac{3}{2(4+4x+x^2) - 16 - 8x + 8} \\ &= \frac{3}{8+8x+2x^2 - 16 - 8x + 8} \\ &= \frac{3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{3}{2(2-x)^2 - 8(2-x) + 8} \\ &= \frac{3}{2(2-x)^2 - 16 + 8x + 8} \\ &= \frac{3}{8-8x+2x^2 - 16 + 8x + 8} \\ &= \frac{3}{2x^2} \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 2$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(2\cdot 2 - x)^2 - 8(2\cdot 2 - x) + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(4 - x)^2 - 8(4 - x) + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(4 - x)^2 - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(16 - 8x + x^2) - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{32 - 16x + 2x^2 - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 2$ bewiesen.

Lösung zu 2d

Gegeben:

$$f(x)=\frac{5}{3x^2-6x+3} \quad \text{und} \quad x_0=1$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$.
Wir berechnen $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned}
f(1+x) &= \frac{5}{3(1+x)^2-6(1+x)+3} \\
&= \frac{5}{3(1+x)^2-6-6x+3} \\
&= \frac{5}{3(1+2x+x^2)-6-6x+3} \\
&= \frac{5}{3+6x+3x^2-6-6x+3} \\
&= \frac{5}{3x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1-x) &= \frac{5}{3(1-x)^2-6(1-x)+3} \\
&= \frac{5}{3(1-x)^2-6+6x+3} \\
&= \frac{5}{3(1-2x+x^2)-6+6x+3} \\
&= \frac{5}{3-6x+3x^2-6+6x+3} \\
&= \frac{5}{3x^2}
\end{aligned}$$

$f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0=1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{3(2\cdot1-x)^2-6(2\cdot1-x)+3} \\
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{3(2-x)^2-6(2-x)+3} \\
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{3(2-x)^2-12+6x+3} \\
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{3(4-4x+x^2)-12+6x+3} \\
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{12-12x+3x^2-12+6x+3} \\
\frac{5}{3x^2-6x+3} &= \frac{5}{3x^2-6x+3}
\end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Lösung zu 2e

Gegeben:

$f(x) = e^{x^2-6x}$ und $x_0 = 3$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$.
Wir berechnen $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(3+x) &= e^{(3+x)^2-6(3+x)} \\ &= e^{(9+6x+x^2)-6(3+x)} \\ &= e^{9+6x+x^2-18-6x} \\ &= e^{x^2-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3-x) &= e^{(3-x)^2-6(3-x)} \\ &= e^{(9-6x+x^2)-6(3-x)} \\ &= e^{9-6x+x^2-18+6x} \\ &= e^{x^2-9} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich zu $x_0=3$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

$$\begin{aligned} e^{x^2-6x} &= e^{(2\cdot 3-x)^2-6(2\cdot 3-x)} \\ e^{x^2-6x} &= e^{(6-x)^2-6(6-x)} \\ e^{x^2-6x} &= e^{(36-12x+x^2)-36+6x} \\ e^{x^2-6x} &= e^{36-12x+x^2-36+6x} \\ e^{x^2-6x} &= e^{x^2-6x} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 3$ bewiesen.

Lösung zu 2f

Gegeben:

$f(x) = \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}}$ und $x_0 = 1$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.
Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$
\begin{aligned}
f(1+x) &= \frac{e^{2(1+x)} + e^2}{e^{(1+x)+1}} \\
&= \frac{e^{2+2x} + e^2}{e^{x+2}} \\
&= \frac{e^2 e^{2x} + e^2}{e^2 e^x} \\
&= \frac{e^2 \left(e^{2x} + 1\right)}{e^2 e^x} \\
&= \frac{e^{2x} + 1}{e^x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(1-x) &= \frac{e^{2(1-x)} + e^2}{e^{(1-x)+1}} = \frac{e^{2-2x} + e^2}{e^{2-x}} \\
&= \frac{e^2 e^{-2x} + e^2}{e^2 e^{-x}} = \frac{e^2 \left(e^{-2x} + 1\right)}{e^2 e^{-x}} \\
&= \frac{e^{-2x} + 1}{e^{-x}} = \frac{\left(e^{-2x} + 1\right) \cdot e^{2x}}{e^{-x} \cdot e^{2x}} \\
&= \frac{e^{-2x} e^{2x} + e^{2x}}{e^{-x} \cdot e^{2x}} = \frac{1 + e^{2x}}{e^x}
\end{aligned}
$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^{2(2\cdot 1 - x)} + e^2}{e^{(2\cdot 1 - x)+1}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^{4-2x} + e^2}{e^{3-x}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^4 e^{-2x} + e^2}{e^3 e^{-x}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^2 \left(e^2 e^{-2x} + 1\right)}{e^3 e^{-x}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^{2-2x} + 1}{e e^{-x}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{\left(e^{2-2x} + 1\right) e^{2x}}{\left(e e^{-x}\right) e^{2x}} \\
\frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^2 + e^{2x}}{e^{x+1}}
\end{aligned}
$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Lösung zu 3a - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$f(x)=\frac{2x-5}{x-3}$ und P=(3,2)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(3+x)-2$	$=\frac{2(3+x)-5}{(3+x)-3}-2$	**Klammern auflösen**
	$=\frac{6+2x-5}{x}-2$	**vereinfachen**
	$=\frac{2x+1}{x}-2$	**gleichnamige Brüche erzeugen**
	$=\frac{2x+1}{x}-\frac{2x}{x}$	**Brüche subtrahieren**
	$=\frac{2x+1-2x}{x}$	**vereinfachen**
	$=\frac{1}{x}$	

$-f(3-x)+2$	$=-\frac{2(3-x)-5}{(3-x)-3}+2$	**Klammern auflösen**
	$=-\frac{6-2x-5}{-x}+2$	**vereinfachen**
	$=-\frac{1-2x}{-x}+2$	**Minuszeichen in Nenner bringen**
	$=\frac{1-2x}{-(-x)}+2$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{1-2x}{x}+2$	**gleichnamige Brüche erzeugen**
	$=\frac{1-2x}{x}+\frac{2x}{x}$	**Brüche addieren**
	$=\frac{1}{x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(3/2) .

Lösung zu 3a - Lösungsvariante 2

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen,
ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{2x-5}{x-3}$	$= 2\cdot 2 - \frac{2(6-x)-5}{(6-x)-3}$	**vereinfachen und Klammern auflösen**
	$= 4 - \frac{7-2x}{3-x}$	**auf gleichen Nenner bringen**
	$= \frac{4(3-x)}{3-x} - \frac{7-2x}{3-x}$	**Klammer aufösen**
	$= \frac{12-4x}{3-x} - \frac{7-2x}{3-x}$	**Bruch subtrahieren**
	$= \frac{12-4x-(7-2x)}{3-x}$	**Klammer auflösen**
	$= \frac{12-4x-7+2x}{3-x}$	**vereinfachen**
	$= \frac{5-2x}{3-x}$	**Bruch mit – 1 erweitern**
$\frac{2x-5}{x-3}$	$= \frac{2x-5}{x-3}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(3/2) ist.

Lösung zu 3b - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1} \quad \text{und} \quad P=(-1,1)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(-1+x)-1$	$=\frac{(-1+x)+2}{(-1+x)+1}-1$	**Klammern auflösen**
	$=\frac{x+1}{x}-1$	**gleichnamige Brüche erzeugen**
	$=\frac{x+1}{x}-\frac{1x}{x}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\frac{x+1-x}{x}$	**vereinfachen**
	$=\frac{1}{x}$	

$-f(-1-x)+1$	$=-\frac{(-1-x)+2}{(-1-x)+1}+1$	**vereinfachen**
	$=-\frac{1-x}{-x}+1$	**Minuszeichen in den Nenner bringen**
	$=\frac{1-x}{-(-x)}+1$	**Klammer beseitigen**
	$=\frac{1-x}{x}+1$	**in gleichnamige Brüche umwandeln**
	$=\frac{1-x}{x}+\frac{1x}{x}$	**Brüche addieren und vereinfachen**
	$=\frac{1}{x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die
Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(-1/1)$.

Lösung zu 3b - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ und P=(–1,1)

Lösungsweg mit Formel f(x) =2y_0 –f(2x_0–x):

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **f(x) = 2y_0 – f(2x_0 – x)**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen,
ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{x+2}{x+1}$	$= 2\cdot 1-\frac{(-2-x)+2}{(-2-x)+1}$	**Klammern auflösen und vereinfachen**
	$= 2-\frac{-x}{-1-x}$	**auf gleichen Nenner bringen**
	$=\frac{2(-1-x)}{-1-x}-\frac{-x}{-1-x}$	**subtrahieren**
	$=\frac{2(-1-x)+x}{-1-x}$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{-2-2x+x}{-1-x}$	**vereinfachen**
	$=\frac{-2-x}{-1-x}$	**Bruch mit –1 erweitern**
$\frac{x+2}{x+1}$	$=\frac{x+2}{x+1}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(–1/1) ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3c - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$f(x)=\frac{4x-3}{x-1}$ und P=(1,4)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(1+x)-4$	$=\frac{4(1+x)-3}{(1+x)-1}-4$	**Klammern auflösen**
	$=\frac{4+4x-3}{1+x-1}-4$	**vereinfachen**
	$=\frac{1+4x}{x}-4$	**auf gleichen Nenner bringen und addieren**
	$=\frac{1+4x-4x}{x}$	**vereinfachen**
	$=\frac{1}{x}$	

$-f(1-x)+4$	$=-\left[\frac{4(1-x)-3}{(1-x)-1}\right]+4$	**Klammern auflösen**
	$=-\left[\frac{4-4x-3}{-x}\right]+4$	**vereinfachen**
	$=-\left[\frac{1-4x}{-x}\right]+4$	**Minuszeichen in den Nenner bringen**
	$=\frac{1-4x}{-(-x)}+4$	**Nenner vereinfachen**
	$=\frac{1-4x}{x}+4$	**gleichnamig machen**
	$=\frac{1-4x}{x}+\frac{4x}{x}$	**Brüche addieren**
	$=\frac{1-4x+4x}{x}$	**vereinfachen**
	$=\frac{1}{x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(1/4) .

Lösung zu 3c - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$f(x)=\frac{4x-3}{x-1}$ und P=(1,4)

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{4x-3}{x-1}$	$=$	$2\cdot 4-\frac{4(2\cdot 1-x)-3}{(2\cdot 1-x)-1}$	vereinfachen
	$=$	$8-\frac{4(2-x)-3}{2-x-1}$	Klammer im Zähler ausmultiplizieren Nenner vereinfachen
	$=$	$8-\frac{8-4x-3}{1-x}$	vereinfachen
	$=$	$8-\frac{5-4x}{1-x}$	Auf gemeinsamen Nenner bringen
	$=$	$\frac{8(1-x)}{1-x}-\frac{5-4x}{1-x}$	Klammer ausmultiplizieren
	$=$	$\frac{8-8x}{1-x}-\frac{5-4x}{1-x}$	auf einen Bruch bringen
	$=$	$\frac{8-8x-(5-4x)}{1-x}$	Klammer auflösen
	$=$	$\frac{8-8x-5+4x}{1-x}$	vereinfachen
	$=$	$\frac{3-4x}{1-x}$	Zähler und Nenner mit –1 erweitern
$\frac{4x-3}{x-1}$	$=$	$\frac{4x-3}{x-1}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(1/4) ist.

Lösung zu 3d - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$f(x)=\frac{e^x+e}{e^x-e}$ und P=(1,0)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$$f(1+x)-0 = \frac{e^{(1+x)}+e}{e^{(1+x)}-e} \quad \textbf{Potenzgesetz}$$

$$= \frac{ee^x+e}{ee^x-e} \quad \textbf{e ausklammern}$$

$$= \frac{e(e^x+1)}{e(e^x-1)} \quad \textbf{Kürze : e}$$

$$= \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$-f(1-x)+0 = -\frac{e^{(1-x)}+e}{e^{(1-x)}-e} \quad \textbf{Potenzgesetz}$$

$$= -\frac{ee^{-x}+e}{ee^{-x}-e} \quad \textbf{e ausklammern}$$

$$= -\frac{e(e^{-x}+1)}{e(e^{-x}-1)} \quad \textbf{Kürze : e}$$

$$= -\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} \quad \textbf{Definition negativer Exponenten anwenden}$$

$$= -\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1} \quad \textbf{mit } e^x \textbf{ erweitern}$$

$$= -\frac{\frac{e^x}{e^x}+e^x}{\frac{e^x}{e^x}-e^x} \quad \textbf{kürzen}$$

$$= -\frac{1+e^x}{1-e^x} \quad \textbf{Minuszeichen in den Nenner}$$

$$= \frac{1+e^x}{-(1-e^x)} \quad \textbf{Klammer auflösen}$$

$$= \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(1/0) .

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3d - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x+e}{e^x-e} \quad \text{und} \quad P=(1,0)$$

Lösungsweg mit Formel f(x) =2y$_0$ −f(2x$_0$−x):

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **f(x) = 2y$_0$ – f(2x$_0$ – x)**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x+e}{e^x-e}$	$=$	$2\cdot 0-\frac{e^{2-x}+e}{e^{2-x}-e}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
	$=$	$-\frac{\frac{e^2}{e^x}+e}{\frac{e^2}{e^x}-e}$	**gleichnamige Brüche erzeugen**
	$=$	$-\frac{\frac{e^2}{e^x}+\frac{ee^x}{e^x}}{\frac{e^2}{e^x}-\frac{ee^x}{e^x}}$	**Brüche addieren bzw. subtrahieren**
	$=$	$-\frac{\frac{e^2+ee^x}{e^x}}{\frac{e^2-ee^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$=$	$-\frac{e^2+ee^x}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^2-ee^x}$	**Kürze : e^x**
	$=$	$-\frac{e^2+ee^x}{e^2-ee^x}=$	**e ausgeklammern**
	$=$	$-\frac{e\left(e+e^x\right)}{e\left(e-e^x\right)}$	**e kürzen**
	$=$	$-\frac{e+e^x}{e-e^x}$	**Minus in den Nenner bringen**
	$=$	$\frac{e+e^x}{-\left(e-e^x\right)}$	**Klammer auflösen**
$\frac{e^x+e}{e^x-e}$	$=$	$\frac{e^x+e}{e^x-e}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(1/0) ist.

Lösung zu 3e - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{2}}{e^{x}-e^{2}} \quad \text{und} \quad P=(2,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$$f(2+x)-0=\frac{e^{(2+x)}+e^{2}}{e^{(2+-x)}-e^{2}}$$

Potenzgesetz anwenden

$$=\frac{e^{2}e^{x}+e^{2}}{e^{2}e^{x}-e^{2}}$$

Klammere e^2 aus

$$=\frac{e^{2}\left(e^{x}+1\right)}{e^{2}\left(e^{x}-1\right)}$$

Kürze : e^x

$$=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

$$-f(2-x)+0=-\frac{e^{(2-x)}+e^{2}}{e^{(2-x)}-e^{2}}$$

Potenzgesetz anwenden

$$=-\frac{e^{2}e^{-x}+e^{2}}{e^{2}e^{-x}-e^{2}}$$

e^2 ausklammern

$$=-\frac{e^{2}\left(e^{-x}+1\right)}{e^{2}\left(e^{-x}-1\right)}$$

kürze : e^2

$$=-\frac{\frac{1}{e^{x}}+1}{\frac{1}{e^{x}}-1}$$

Bruch mit e^x erweitern

$$=-\frac{\left(\frac{1}{e^{x}}+1\right)\cdot e^{x}}{\left(\frac{1}{e^{x}}-1\right)\cdot e^{x}}$$

ausmultiplizieren

$$=-\frac{\frac{e^{x}}{e^{x}}+e^{x}}{\frac{e^{x}}{e^{x}}-e^{x}}$$

kürzen

$$=-\frac{1+e^{x}}{1-e^{x}}$$

Minuszeichen in Nenner bringen

$$=\frac{1+e^{x}}{-\left(1-e^{x}\right)}$$

Klammer auflösen

$$=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(2/0) .

Lösung zu 3e - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x+e^2}{e^x-e^2} \quad \text{und} \quad P=(2,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$**

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x+e^2}{e^x-e^2} = 2\cdot 0-\frac{e^{2\cdot 2-x}+e^2}{e^{2\cdot 2-x}-e^2}$	**Defintion negativer Exponenten anwenden**
$= -\frac{\frac{e^4}{e^x}+e^2}{\frac{e^4}{e^x}-e^2}$	**gleichnamig machen**
$= -\frac{\frac{e^4}{e^x}+\frac{e^2e^x}{e^x}}{\frac{e^4}{e^x}-\frac{e^2e^x}{e^x}}$	**Brüche addieren bzw. subtrahieren**
$= -\frac{\frac{e^4+e^2e^x}{e^x}}{\frac{e^4-e^2e^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren).**
$= -\frac{e^4+e^2e^x}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^4-e^2e^x}$	**Kürze e^x**
$= -\frac{e^4+e^2e^x}{e^4-e^2e^x} =$	**e^2 ausgeklammern**
$= -\frac{e^2\left(e^2+e^x\right)}{e^2\left(e^2-e^x\right)}$	**Kürze e^2**
$= -\frac{e^2+e^x}{e^2-e^x}$	**Minus in den Nenner bringen**
$= \frac{e^2+e^x}{-\left(e^2-e^x\right)}$	**Im Zähler die Reihenfolge vertauschen und im Nenner die Klammer auflösen**
$\frac{e^x+e^2}{e^x-e^2} = \frac{e^x+e^2}{e^x-e^2}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(2/0) ist.

Lösung zu 3f - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$f(x)=\frac{8}{e^x+e^3}$ und P=(3,4)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

f(3 + x) – 4	$=\frac{8e^3}{e^{3+x}+e^3}-4$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\frac{8e^3}{e^3e^x+e^3}-4$	**gleichnamig machen**
	$=\frac{8e^3}{e^3e^x+e^3}-\frac{4\left(e^3e^x+e^3\right)}{e^3e^x+e^3}$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{8e^3}{e^3e^x+e^3}-\frac{4e^3e^x+4e^3}{e^3e^x+e^3}$	**Brüche subtrahieren**
	$=\frac{8e^3-\left(4e^3e^x+4e^3\right)}{e^3e^x+e^3}$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{8e^3-4e^3e^x-4e^3}{e^3e^x+e^3}$	**e^3 ausklammern**
	$=\frac{e^3\left(8-4e^x-4\right)}{e^3\left(e^x+1\right)}$	**e^3 kürzen**
	$=\frac{8-4e^x-4}{e^x+1}$	**vereinfachen**
	$=\frac{4-4e^x}{e^x+1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

–f(3 – x) + 4	$= -\dfrac{8e^3}{e^{3-x}+e^3}+4$	**Potenzdefinition anwenden**
	$= -\dfrac{8e^3}{\frac{e^3}{e^x}+e^3}+4$	**Bei Brüche im Nenner auf Hauptnenner bringen**
	$= -\dfrac{8e^3}{\frac{e^3}{e^x}+\frac{e^x e^3}{e^x}}+4$	**Brüche im Nenner zusammenfassen**
	$= -\dfrac{8e^3}{\frac{e^3+e^x e^3}{e^x}}+4$	**Doppelbruch beseitigen und e^3 kürzen**
	$= -\dfrac{8e^x}{1+e^x}+4$	**auf Hauptnenner bringen**
	$= -\dfrac{8e^x}{1+e^x}+\dfrac{4\left(1+e^x\right)}{1+e^x}$	**Reihenfolge der Brüche ändern**
	$= \dfrac{4\left(1+e^x\right)}{1+e^x}-\dfrac{8e^x}{1+e^x}$	**Klammer auflösen**
	$= \dfrac{4+4e^x}{1+e^x}-\dfrac{8e^x}{1+e^x}$	**Brüche zusammenfassen**
	$= \dfrac{4+4e^x-8e^x}{1+e^x}$	**vereinfachen**
	$= \dfrac{4-4e^x}{1+e^x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(3/4) .

Lösung zu 3f - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{8e^3}{e^x+e^3} \quad \text{und} \quad P=(3,4)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **$f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{8e^3}{e^x+e^3}$	$= 2\cdot 4-\frac{8e^3}{e^{6-x}+e^3}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
	$= 8-\frac{8e^3}{\frac{e^6}{e^x}+e^3}$	**auf gleichen Nenner bringen**
	$= 8-\frac{8e^3}{\frac{e^6}{e^x}+\frac{e^3e^x}{e^x}}$	**Die beiden Brüche im Nenner addieren**
	$= 8-\frac{8e^3}{\frac{e^6+e^3e^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$= 8-\frac{8e^3e^x}{e^6+e^3e^x}$	**auf gleichen Nenner bringen**
	$= \frac{8\left(e^6+e^3e^x\right)}{e^6+e^3e^x}-\frac{8e^3e^x}{e^6+e^3e^x}$	**Bruch subtrahieren**
	$= \frac{8e^6+8e^3e^x-8e^3e^x}{e^6+e^3e^x}$	**vereinfachen**
	$= \frac{8e^6}{e^6+e^3e^x}$	**e^3 ausklammern**
	$= \frac{8e^3e^3}{e^3\left(e^3+e^x\right)}$	**e^3 kürzen**
$\frac{8e^3}{e^x+e^3}$	$= \frac{8e^3}{e^3+e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(3/4) ist.

Lösung zu 3g - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^7} \quad \text{und} \quad P=\left(7,\frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen dann beide Werte:

f(7 + x) − 0.5	=	$\frac{e^{7+x}}{e^{7+x}+e^7}-0.5$	**Potenzgesetz anwenden**
	=	$\frac{e^7e^x}{e^7e^x+e^7}-0.5$	**e^7 ausklammern**
	=	$\frac{e^7e^x}{e^7\left(e^x+1\right)}-0.5$	**e^7 kürzen**
	=	$\frac{e^x}{e^x+1}-0.5$	**gleichnamig machen**
	=	$\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{0.5\left(e^x+1\right)}{e^x+1}$	**subtrahieren**
	=	$\frac{e^x-0.5\left(e^x+1\right)}{e^x+1}$	**Klammer auflösen**
	=	$\frac{e^x-0.5e^x-0.5}{e^x+1}$	**vereinfachen**
	=	$\frac{0.5e^x-0.5}{e^x+1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

−f(7 − x) + 0.5	$= -\dfrac{e^{7-x}}{e^{7-x}+e^{7}}+0.5$	**Potenzdefinition anwenden**
	$= -\dfrac{\frac{e^{7}}{e^{x}}}{\frac{e^{7}}{e^{x}}+e^{7}}+0.5$	**gleichnamig machen**
	$= -\dfrac{\frac{e^{7}}{e^{x}}}{\frac{e^{7}}{e^{x}}+\frac{e^{7}e^{x}}{e^{x}}}+0.5$	**Brüche addieren**
	$= -\dfrac{\frac{e^{7}}{e^{x}}}{\frac{e^{7}+e^{7}e^{x}}{e^{x}}}+0.5$	**Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$= -\dfrac{e^{7}}{e^{x}}\cdot\dfrac{e^{x}}{e^{7}+e^{7}e^{x}}+0.5$	**Kürze : e^{x}**
	$= -\dfrac{e^{7}}{e^{7}+e^{7}e^{x}}+0.5$	**Reihenfolge vertauschen**
	$= 0.5-\dfrac{e^{7}}{e^{7}+e^{7}e^{x}}$	**e^{7} ausklammern**
	$= 0.5-\dfrac{e^{7}}{e^{7}\left(1+e^{x}\right)}$	**Kürze e^{7}**
	$= 0.5-\dfrac{1}{1+e^{x}}$	**gleichnamig machen**
	$= \dfrac{0.5\left(1+e^{x}\right)}{1+e^{x}}-\dfrac{1}{1+e^{x}}$	**Klammer auflösen**
	$= \dfrac{0.5+0.5e^{x}}{1+e^{x}}-\dfrac{1}{1+e^{x}}$	**Bruch subtrahieren**
	$= \dfrac{0.5+0.5e^{x}-1}{1+e^{x}}$	**vereinfachen**
	$= \dfrac{0.5e^{x}-0.5}{1+e^{x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(7/\frac{1}{2})$.

Lösung zu 3g - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^7} \quad \text{und} \quad P=(7,\frac{1}{2})$$

Lösungsweg mit Formel $f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x)=2y_0-f(2x_0-x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\frac{e^x}{e^x+e^7} = 2\cdot\frac{1}{2}-\frac{e^{2\cdot 7-x}}{e^{2\cdot 7-x}+e^7} \quad \textbf{vereinfachen}$$

$$= 1-\frac{e^{14-x}}{e^{14-x}+e^7} \quad \textbf{Definition der Potenz}$$

$$= 1-\frac{\frac{e^{14}}{e^x}}{\frac{e^{14}}{e^x}+e^7} \quad \textbf{Nenner: Brüche auf Hauptnenner bringen}$$

$$= 1-\frac{\frac{e^{14}}{e^x}}{\frac{e^{14}}{e^x}+\frac{e^7e^x}{e^x}} \quad \textbf{Brüche zusammenführen}$$

$$= 1-\frac{\frac{e^{14}}{e^x}}{\frac{e^{14}+e^7e^x}{e^x}} \quad \textbf{Doppelbruch beseitigen}$$

$$= 1-\frac{e^{14}}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^{14}+e^7e^x} \quad \textbf{Kürze } \mathbf{e^x}$$

$$= 1-\frac{e^{14}}{e^{14}+e^7e^x} \quad \textbf{Kürze } \mathbf{e^7}$$

$$= 1-\frac{e^7}{e^7+e^x} \quad \textbf{Die Zahl 1 erweitern}$$

$$= \frac{e^7+e^x}{e^7+e^x}-\frac{e^7}{e^7+e^x} \quad \textbf{Brüche zusammenführen}$$

$$= \frac{e^7+e^x-e^7}{e^7+e^x} \quad \textbf{vereinfachen}$$

$$\frac{e^x}{e^x+e^7} = \frac{e^x}{e^7+e^x}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(7/\frac{1}{2})$ ist.

Lösung zu 3h - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{10e^x}{e^x+e} \quad \text{und} \quad P=(1,5)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(1+x)-5$	$=\dfrac{10e^{1+x}}{e^{1+x}+e}-5$	**Potenzgesetz**
	$=\dfrac{10ee^x}{ee^x+e}-5$	**Kürze e**
	$=\dfrac{10e^x}{e^x+1}-5$	**gleichnamig machen**
	$=\dfrac{10e^x}{e^x+1}-\dfrac{5(e^x+1)}{e^x+1}$	**Klammer auflösen**
	$=\dfrac{10e^x}{e^x+1}-\dfrac{5e^x+5}{e^x+1}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\dfrac{10e^x-5e^x-5}{e^x+1}$	**vereinfachen**
	$=\dfrac{5e^x-5}{e^x+1}$	

$-f(1-x)+5$	$=-\dfrac{10e^{1-x}}{e^{1-x}+e}+5$	**Definition negativer Exponenten**
	$=-\dfrac{\frac{10e}{e^x}}{\frac{e}{e^x}+e}+5$	**Im Nenner die Brüche auf gleichen Nenner bringen**
	$=-\dfrac{\frac{10e}{e^x}}{\frac{e}{e^x}+\frac{ee^x}{e^x}}+5$	**Brüche zusammen - fassen**
	$=-\dfrac{\frac{10e}{e^x}}{\frac{e+ee^x}{e^x}}+5$	**Doppelbruch beseitigen (Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$=-\dfrac{10e}{e^x}\cdot\dfrac{e^x}{e+ee^x}+5$	**Kürze e^x**
	$=-\dfrac{10e}{e+ee^x}+5$	**Durch e kürzen**
	$=-\dfrac{10}{1+e^x}+5$	**Hauptnenner bilden**
	$=-\dfrac{10}{1+e^x}+\dfrac{5(1+e^x)}{1+e^x}$	**Klammer auflösen**
	$=-\dfrac{10}{1+e^x}+\dfrac{5+5e^x}{1+e^x}$	**Brüche zusammenfassen**
	$=\dfrac{5e^x-5}{1+e^x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(1/5) .

Lösung zu 3h - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{10e^x}{e^x+e} \quad \text{und} \quad P=(1,5)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$**

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{10e^x}{e^x+e} = 2\cdot 5-\frac{10e^{2\cdot 1-x}}{e^{2\cdot 1-x}+e}$	**vereinfachen**
$= 10-\frac{10e^{2-x}}{e^{2-x}+e}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
$= 10-\frac{\frac{10e^2}{e^x}}{\frac{e^2}{e^x}+e}$	**Im Nenner gleichnamige Brüch erzeugen**
$= 10-\frac{\frac{10e^2}{e^x}}{\frac{e^2}{e^x}+\frac{ee^x}{e^x}}$	**In Nenner die Brüche addieren**
$= 10-\frac{\frac{10e^2}{e^x}}{\frac{e^2+ee^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen, indem man Zähler mit Kehrwert des Nenners multipliziert**
$= 10-\frac{10e^2}{e^x}\frac{e^x}{e^2+ee^x}$	**Kürze e^x**
$= 10-\frac{10e^2}{e^2+ee^x}$	**Kürze e**
$= 10-\frac{10e}{e+e^x}$	**auf gleichen Nenner bringen**
$= \frac{10\left(e+e^x\right)}{e+e^x}-\frac{10e}{e+e^x}$	**Bruch subtrahieren**
$= \frac{10\left(e+e^x\right)-10e}{e+e^x}$	**Klammer auflösen**
$= \frac{10e+10e^x-10e}{e+e^x}$	**vereinfachen**
$\frac{10e^x}{e^x+e} = \frac{10e^x}{e+e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(1/5) ist.

Lösung zu 3i - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+e^4} \quad \text{und} \quad P=(2,3)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen dann beide Werte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f(2+x)-3} &= \frac{6e^{2(2+x)}}{e^{2(2+x)}+e^4}-3\\
&= \frac{6e^{4+2x}}{e^{4+2x}+e^4}-3\\
&= \frac{6e^4e^{2x}}{e^4e^{2x}+e^4}-3\\
&= \frac{6e^{2x}}{e^{2x}+1}-3\\
&= \frac{6e^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{3\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1}\\
&= \frac{6e^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{3e^{2x}+3}{e^{2x}+1}\\
&= \frac{6e^{2x}-3e^{2x}-3}{e^{2x}+1}\\
&= \frac{3e^{2x}-3}{e^{2x}+1}
\end{aligned}$$

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(2-x)+3$	=	$-\dfrac{6e^{2(2-x)}}{e^{2(2-x)}+e^4}+3$	**Klammern auflösen**
	=	$-\dfrac{6e^{4-2x}}{e^{4-2x}+e^4}+3$	**Definition negativer Exponenten**
	=	$-\dfrac{\frac{6e^4}{e^{2x}}}{\frac{e^4}{e^{2x}}+e^4}+3$	**Die Summanden im Nenner auf gleichen Hauptnenner bringen**
	=	$-\dfrac{\frac{6e^4}{e^{2x}}}{\frac{e^4}{e^{2x}}+\frac{e^4e^{2x}}{e^{2x}}}+3$	**Im Nenner : Summanden auf einen Bruch bringen**
	=	$-\dfrac{\frac{6e^4}{e^{2x}}}{\frac{e^4+e^4e^{2x}}{e^{2x}}}+3$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)**
	=	$-\dfrac{6e^4}{e^{2x}}\cdot\dfrac{e^{2x}}{e^4+e^4e^{2x}}+3$	**e^{2x} kürzen**
	=	$-\dfrac{6e^4}{e^4+e^4e^{2x}}+3$	**e^4 kürzen**
	=	$-\dfrac{6}{1+e^{2x}}+3$	**Auf einen Bruch bringen**
	=	$-\dfrac{6}{1+e^{2x}}+\dfrac{3(1+e^{2x})}{1+e^{2x}}$	**Klammer auflösen**
	=	$-\dfrac{6}{1+e^{2x}}+\dfrac{3+3e^{2x}}{1+e^{2x}}$	**Auf einen Bruch bringen**
	=	$\dfrac{-6+3+3e^{2x}}{1+e^{2x}}$	**vereinfachen**
	=	$\dfrac{3e^{2x}-3}{1+e^{2x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(2/3) .

Lösung zu 3i - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+e^4} \quad \text{und} \quad P=(2,3)$$

Lösungsweg mit Formel f(x) =2y$_0$ −f(2x$_0$−x):

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **f(x) = 2y$_0$ − f(2x$_0$ − x)**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+e^4}$	$= 2\cdot 3-\frac{6e^{2(2\cdot 2-x)}}{e^{2(2\cdot 2-x)}+e^4}$	**Vereinfachen**
	$= 6-\frac{6e^{8-2x}}{e^{8-2x}+e^4}$	**Definition der negativen Exponenten anwenden**
	$= 6-\frac{\frac{6e^8}{e^{2x}}}{\frac{e^8}{e^{2x}}+e^4}$	**Im Nenner die Konstante und den Bruch gleichnamig machen**
	$= 6-\frac{\frac{6e^8}{e^{2x}}}{\frac{e^8}{e^{2x}}+\frac{e^4e^{2x}}{e^{2x}}}$	**Im Nenner die Brüche addieren**
	$= 6-\frac{\frac{6e^8}{e^{2x}}}{\frac{e^8+e^4e^{2x}}{e^{2x}}}$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$= 6-\frac{6e^8}{e^{2x}}\cdot\frac{e^{2x}}{e^8+e^4e^{2x}}$	**Kürze : e^{2x}**
	$= 6-\frac{6e^8}{e^8+e^4e^{2x}}$	**Kürze : e^4**
	$= 6-\frac{6e^4}{e^4+e^{2x}}$	**gleichnamige Brüch bilden**
	$= \frac{6\left(e^4+e^{2x}\right)}{e^4+e^{2x}}-\frac{6e^4}{e^4+e^{2x}}$	**Klammer auflösen**
	$= \frac{6e^4+6e^{2x}}{e^4+e^{2x}}-\frac{6e^4}{e^4+e^{2x}}$	**Bruch subtrahieren**
	$= \frac{6e^4+6e^{2x}-6e^4}{e^4+e^{2x}}$	**Vereinfachen**
$\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+e^4}$	$= \frac{6e^{2x}}{e^4+e^{2x}}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(2/3) ist.

Lösung zu 3j

Gegeben:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ und P=(1,2)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x)-2 &= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(1+x)^2 + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(x^2 + 2x + 1) + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 3 + 3x + 1 - 2 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(1-x)+2 &= -\left[(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 3(1-x) + 1\right] + 2 \\ &= -\left[-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3(x^2 - 2x + 1) + 3(1-x) + 1\right] + 2 \\ &= -\left[-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 6x - 3 + 3 - 3x + 1\right] + 2 \\ &= \left[x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 3 + 3x - 1\right] + 2 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(1/2) .

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$.
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 2 \cdot 2 - \left[\mathbf{(2-x)^3} \mathbf{- 3(2-x)^2} + 3(2-x) + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[\mathbf{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8} \mathbf{- 3(4 - 4x + x^2)} + 3(2-x) + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \mathbf{- 12 + 12x - 3x^2} + \mathbf{3(2-x) + 1} \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 12 + 12x - 3x^2 + \mathbf{6 - 3x + 1} \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 12 - 12x + 3x^2 - 6 + 3x - 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(1/2) ist.

Lösung zu 3k

Gegeben:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ und P=(3,1)

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned}
f(3+x)-1 &= (3+x)^3 - 9(3+x)^2 + 27(3+x) - 26 - 1 \\
&= (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 9(x^2 + 6x + 9) + 81 + 27x - 27 \\
&= (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 9x^2 - 54x - 81 + 81 + 27x - 27 \\
&= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 9x^2 - 54x - 81 + 81 + 27x - 27 \\
&= x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f(3-x)+1 &= -\left[(3-x)^3 - 9(3-x)^2 + 27(3-x) - 26\right] + 1 \\
&= -\left[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9(x^2 - 6x + 9) + 81 - 27x - 26\right] + 1 \\
&= -\left[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 54x - 81 + 81 - 27x - 26\right] + 1 \\
&= -\left[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 54x - 27x - 26\right] + 1 \\
&= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 9x^2 - 54x + 27x + 26 + 1 \\
&= x^3
\end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(3/1) .

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x) = 2y_0 - f(2x_0-x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned}
x^3 - 9x^2 + 27x - 26 &= 2\cdot 1 - \left[(6-x)^3 - 9(6-x)^2 + 27(6-x) - 26\right] \\
&= 2\cdot 1 - \left[-x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 9(x^2 - 12x + 36) + 27(6-x) - 26\right] \\
&= 2\cdot 1 - \left[-x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 9x^2 + 108x - 324 + 162 - 27x - 26\right] \\
&= 2\cdot 1 + x^3 - 18x^2 + 108x - 216 + 9x^2 - 108x + 324 - 162 + 27x + 26 \\
x^3 - 9x^2 + 27x - 26 &= x^3 - 9x^2 + 27x - 26
\end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(3/1) ist.

Lösung zu 3L

Gegeben:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ und $P = (-1, -3)$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned}
f(-1+x)-(-3) &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 + 3 \\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3(x^2 - 2x + 1) + 3x - 3 - 2 + 3 \\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 3x - 3 - 2 + 3 \\
&= x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f(-1-x)+(-3) &= -\left[(-x-1)^3 + 3(-x-1)^2 + 3(-x-1) - 2\right] - 3 \\
&= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\
&= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 6x + 3 - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\
&= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 6x + 3 - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\
&= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 3x + 3 + 2 - 3 \\
&= x^3
\end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(–1/–3) .

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 + 3x - 2 &= 2\cdot(-3) - \left[(-2-x)^3 + 3(-2-x)^2 + 3(-2-x) - 2\right] \\
&= -6 - \left[-x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3(x^2 + 4x + 4) - 6 - 3x - 2\right] \\
&= -6 - \left[-x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3x^2 + 12x + 12 - 6 - 3x - 2\right] \\
&= -6 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x^2 - 12x - 12 + 6 + 3x + 2 \\
x^3 + 3x^2 + 3x - 2 &= x^3 + 3x^2 + 3x - 2
\end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu P(–1/–3) ist.

Lösung zu 4a – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x+a}{e^x-a} \quad \text{und} \quad P=(\ln a,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen dann beide Werte:

f(lna + x) – 0	$=\dfrac{e^{\ln a+x}+a}{e^{\ln a+x}-a}-0$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\dfrac{e^{\ln a}e^x+a}{e^{\ln a}e^x-a}$	$\mathbf{e^{\ln a}=a}$
	$=\dfrac{ae^x+a}{ae^x-a}$	**a ausklammern**
	$=\dfrac{a\left(e^x+1\right)}{a\left(e^x-1\right)}$	**Kürze : a**
	$=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x) + 0$	$= -\left[\dfrac{e^{\ln a - x} + a}{e^{\ln a - x} - a}\right] - 0$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
	$= -\left[\dfrac{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} - a}\right]$	**$e^{\ln a} = a$**
	$= -\left[\dfrac{\frac{a}{e^x} + a}{\frac{a}{e^x} - a}\right]$	**Hauptnenner bilden (im Zähler und Nenner)**
	$= -\left[\dfrac{\frac{a}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}}{\frac{a}{e^x} - \frac{ae^x}{e^x}}\right]$	**Brüche addieren**
	$= -\left[\dfrac{\frac{a+ae^x}{e^x}}{\frac{a-ae^x}{e^x}}\right]$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$= -\dfrac{a+ae^x}{e^x} \cdot \dfrac{e^x}{a-ae^x}$	**Kürze : e^x**
	$= -\dfrac{a+ae^x}{a-ae^x}$	**a ausklammern**
	$= -\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$	**Minuszeichen in den Nenner bringen**
	$= \dfrac{1+e^x}{-(1-e^x)}$	**Klammer auflösen**
	$= \dfrac{1+e^x}{e^x - 1}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu P(lna/0) .

Lösung zu 4a – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x+a}{e^x-a} \quad \text{und} \quad P=(\ln a,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x+a}{e^x-a} = 2\cdot 0-\left[\frac{e^{2\ln a-x}+a}{e^{2\ln a-x}-a}\right]$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
$= -\left[\frac{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}+a}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}-a}\right]$	**Bruch und Konstante gleichnamig machen**
$= -\left[\frac{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}+\frac{ae^x}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}-\frac{ae^x}{e^x}}\right]$	**Brüche addieren bzw. subtrahieren**
$= -\left[\frac{\frac{e^{2\ln a}+ae^x}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a}-ae^x}{e^x}}\right]$	**Doppelbruch beseitigen**
$= -\left[\frac{e^{2\ln a}+ae^x}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^{2\ln a}-ae^x}\right]$	**Kürze : e^x**
$= -\left[\frac{e^{2\ln a}+ae^x}{e^{2\ln a}-ae^x}\right]$	**Potenzgesetz anwenden**
$= -\left[\frac{\left(e^{\ln a}\right)^2+ae^x}{\left(e^{\ln a}\right)^2-ae^x}\right]$	**$e^{\ln a} = a$**
$= -\left[\frac{a^2+ae^x}{a^2-ae^x}\right]$	**a ausklammern**
$= -\left[\frac{a\left(a+e^x\right)}{a\left(a-e^x\right)}\right]$	**Kürze : a**
$= -\left[\frac{a+e^x}{a-e^x}\right]$	**Minuszeichen in den Nenner bringen**
$= \frac{a+e^x}{-\left(a-e^x\right)}$	**Klammer auflösen**
$\frac{e^x+a}{e^x-a} = \frac{a+e^x}{e^x-a}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt P(lna/0) ist.

Lösung zu 4b – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{b}{e^x+a} \quad \text{und} \quad P=\left(ln\,a, \frac{b}{2a}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$
und vergleichen beide Werte:

$f(ln\,a+x)-\frac{b}{2a}$	$=\frac{b}{e^{lna+x}+a}-\frac{b}{2a}$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\frac{b}{e^{lna}e^x+a}-\frac{b}{2a}$	$\mathbf{e^{lna}=a}$
	$=\frac{b}{ae^x+a}-\frac{b}{2a}$	**Brüche auf Hauptnenner bringen**
	$=\frac{2ab}{2a\left(ae^x+a\right)}-\frac{b\left(ae^x+a\right)}{2a\left(ae^x+a\right)}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\frac{2ab-b\left(ae^x+a\right)}{2a\left(ae^x+a\right)}$	**Klammern auflösen**
	$=\frac{2ab-abe^x-ab}{2a^2e^x+2a^2}$	**Zähler vereinfachen**
	$=\frac{ab-abe^x}{2a^2e^x+2a^2}$	**Kürze : a**
	$=\frac{b-be^x}{2ae^x+2a}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x) + \frac{b}{2a}$	$= -\frac{b}{e^{\ln a - x} + a} + \frac{b}{2a}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
	$= -\frac{b}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a} + \frac{b}{2a}$	**Hauptnenner bilden**
	$= -\frac{b}{\frac{a}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2a}$	**Brüche addieren**
	$= -\frac{b}{\frac{a + ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2a}$	**Doppelbruch beseitigen**
	$= -\frac{be^x}{a + ae^x} + \frac{b}{2a}$	**Brüche gleichnamig machen**
	$= -\frac{2abe^x}{2a\left(a + ae^x\right)} + \frac{b\left(a + ae^x\right)}{2a\left(a + ae^x\right)}$	**Klammer im Zähler auflösen**
	$= -\frac{2abe^x}{2a\left(a + ae^x\right)} + \frac{ab + abe^x}{2a\left(a + ae^x\right)}$	**Brüche subtrahieren und vereinfachen**
	$= \frac{ab - abe^x}{2a^2 + 2a^2e^x}$	**Kürze : a**
	$= \frac{b - be^x}{2a + 2ae^x}$	

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{b}{2a})$.

Lösung zu 4b – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{b}{e^x+a} \quad \text{und} \quad P=(\ln a,\frac{b}{2a})$$

Lösungsweg mit Formel $f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $\mathbf{f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)}$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{b}{e^x+a} = 2\cdot\frac{b}{2a}-\left[\frac{b}{e^{2\ln a-x}+a}\right]$	**Im linken Bruch 2 kürzen und im rechten Bruch die Definition negativer Exponenten anwenden**
$= \frac{b}{a}-\left[\frac{b}{\frac{a^2}{e^x}+a}\right]$	**auf gleichen Nenner bringen**
$= \frac{b}{a}-\frac{b}{\frac{a^2}{e^x}+\frac{ae^x}{e^x}}$	**Brüche addieren**
$= \frac{b}{a}-\frac{b}{\frac{a^2+ae^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen**
$= \frac{b}{a}-\frac{be^x}{a^2+ae^x}$	**In Nenner a ausklammern**
$= \frac{b}{a}-\frac{be^x}{a(a+e^x)}$	**auf gleichen Nenner bringen**
$= \frac{b(a+e^x)}{a(a+e^x)}-\frac{be^x}{a(a+e^x)}$	**Brüche subtrahieren**
$= \frac{b(a+e^x)-be^x}{a(a+e^x)}$	**Im Zähler : Klammer auflösen**
$= \frac{ab+be^x-be^x}{a(a+e^x)}$	**Zähler vereinfachen**
$= \frac{ab}{a(a+e^x)}$	**Kürze : a**
$\frac{b}{e^x+a} = \frac{b}{a+e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt P(lna/ $\frac{b}{2a}$) ist.

Lösung zu 4c – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+a} \quad \text{und} \quad P=\left(\ln a,\frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(\ln a+x)-\frac{1}{2}$	$=\frac{e^{\ln a+x}}{e^{\ln a+x}+a}-\frac{1}{2}$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\frac{e^{\ln a}e^x}{e^{\ln a}e^x+a}-\frac{1}{2}$	**$e^{\ln a}=a$**
	$=\frac{ae^x}{ae^x+a}-\frac{1}{2}$	**a ausklammern**
	$=\frac{ae^x}{a\left(e^x+1\right)}-\frac{1}{2}$	**Kürze : a**
	$=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)}-\frac{1}{2}$	**gleichnamig machen**
	$=\frac{2e^x}{2\left(e^x+1\right)}-\frac{1\left(e^x+1\right)}{2\left(e^x+1\right)}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\frac{2e^x-\left(e^x+1\right)}{2\left(e^x+1\right)}$	**Klammern auflösen**
	$=\frac{e^x-1}{2e^x+2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x) + \frac{1}{2} = -\frac{e^{\ln a - x}}{e^{na - x} + a} + \frac{1}{2}$	**Potenzgesetz anwenden**
$= -\frac{\frac{e^{\ln a}}{e^{x}}}{\frac{e^{\ln a}}{e^{x}} + a} + \frac{1}{2}$	**gleichnamig machen**
$= -\frac{\frac{e^{\ln a}}{e^{x}}}{\frac{e^{\ln a}}{e^{x}} + \frac{ae^{x}}{e^{x}}} + \frac{1}{2}$	**Brüche addieren**
$= -\frac{\frac{a}{e^{x}}}{\frac{a + ae^{x}}{e^{x}}} + \frac{1}{2}$	**Doppelbruch beseitigen**
$= -\frac{a}{e^{x}} \cdot \frac{e^{x}}{a + ae^{x}} + \frac{1}{2}$	**Durch e^x kürzen**
$= -\frac{a}{a + ae^{x}} + \frac{1}{2}$	**Kürze : a**
$= -\frac{1}{1 + e^{x}} + \frac{1}{2}$	**gleichnamig machen**
$= -\frac{2 \cdot 1}{2(1 + e^{x})} + \frac{1(1 + e^{x})}{2(1 + e^{x})}$	**Brüche addieren**
$= \frac{-2 + 1 + e^{x}}{2(1 + e^{x})}$	**vereinfachen**
$= \frac{e^{x} - 1}{2 + 2e^{x}}$	

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{1}{2})$.

Lösung zu 4c – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+a} \quad \text{und} \quad P=(\ln a, \frac{1}{2})$$

Lösungsweg mit Formel f(x) =2y$_0$ −f(2x$_0$−x):

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **f(x) = 2y$_0$ – f(2x$_0$ – x)**
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x}{e^x+a} = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{e^{2\ln a - x}}{e^{2\ln a - x}+a}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
$= 1 - \frac{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}+a}$	**gleichnamig machen**
$= 1 - \frac{\frac{a^2}{e^x}}{\frac{a^2}{e^x}+\frac{ae^x}{e^x}}$	**addiere die Brüche**
$= 1 - \frac{\frac{a^2}{e^x}}{\frac{a^2+ae^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
$= 1 - \frac{a^2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{a^2+ae^x}$	**Kürze : e^x**
$= 1 - \frac{a^2}{a^2+ae^x}$	**Kürze : a**
$=1-\frac{a}{a+e^x}$	**auf gleichen Nenner bringen**
$=\frac{a+e^x}{a+e^x}-\frac{a}{a+e^x}$	**Subtrahiere Brüche**
$=\frac{a+e^x-a}{a+e^x}$	**vereinfachen**
$\frac{e^x}{e^x+a} = \frac{e^x}{a+e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt P(lna/$\frac{1}{2}$) ist.

Lösung zu 4d – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$f(x)=\frac{be^x}{e^x+a}$ und $P=\left(\ln a,\frac{b}{2}\right)$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f(\ln a+x)-\frac{b}{2}$	$=\frac{be^{\ln a+x}}{e^{\ln a+x}+a}-\frac{b}{2}$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\frac{be^{\ln a}e^x}{e^{\ln a}e^x+a}-\frac{b}{2}$	**$e^{\ln a}=a$**
	$=\frac{bae^x}{ae^x+a}-\frac{b}{2}$	**im Nenner a ausklammern**
	$=\frac{abe^x}{a\left(e^x+1\right)}-\frac{b}{2}$	**Kürze : a**
	$=\frac{be^x}{\left(e^x+1\right)}-\frac{b}{2}$	**auf gleichen Nenner bringen**
	$=\frac{2be^x}{2\left(e^x+1\right)}-\frac{b\left(e^x+1\right)}{2\left(e^x+1\right)}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\frac{2be^x-\left(be^x+b\right)}{2\left(e^x+1\right)}$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{2be^x-be^x-b}{2e^x+2}$	**vereinfachen**
	$=\frac{be^x-b}{2e^x+2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x)+\frac{1}{2}$	$= -\frac{\mathrm{b}\mathrm{e}^{\ln a - x}}{\mathrm{e}^{\ln a - x}+a}+\frac{b}{2}$	**Definition negativer Exponenten anwenden**
	$= -\frac{b\cdot\frac{\mathrm{e}^{\ln a}}{\mathrm{e}^{x}}}{\frac{\mathrm{e}^{\ln a}}{\mathrm{e}^{x}}+a}+\frac{b}{2}$	**Im Nenner : Bruch und Zahl a gleichnamig machen**
	$= -\frac{b\cdot\frac{\mathrm{e}^{\ln a}}{\mathrm{e}^{x}}}{\frac{\mathrm{e}^{\ln a}}{\mathrm{e}^{x}}+\frac{a\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}}+\frac{b}{2}$	**1. Im Nenner Bruch addieren** **2. $e^{\ln a}$ = a**
	$= -\frac{b\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}^{x}}}{\frac{\mathrm{a}+ae^{x}}{\mathrm{e}^{x}}}+\frac{b}{2}$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)**
	$= -\frac{\mathrm{ba}}{\mathrm{e}^{x}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{a}+ae^{x}}+\frac{b}{2}$	**Kürze e^x**
	$= -\frac{\mathrm{ba}}{\mathrm{a}+ae^{x}}+\frac{b}{2}$	**Kürze a**
	$= -\frac{\mathrm{b}}{1+e^{x}}+\frac{b}{2}$	**Brüche gleichnamig machen**
	$= -\frac{2\mathrm{b}}{2\left(1+e^{x}\right)}+\frac{b\left(1+e^{x}\right)}{2\left(1+e^{x}\right)}$	**Brüche addieren**
	$=\frac{\mathrm{b}+be^{x}-2b}{2\left(1+e^{x}\right)}$	**Vereinfachen**
	$=\frac{be^{x}-b}{2+2e^{x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{b}{2})$.

Lösung zu 4d – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{be^x}{e^x+a} \quad \text{und} \quad P=(\ln a, \frac{b}{2})$$

Lösungsweg mit Formel f(x) =2y$_0$ –f(2x$_0$–x):

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **f(x) = 2y$_0$ – f(2x$_0$ – x)**

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{be^x}{e^x+a} = 2\cdot\frac{b}{2} - \frac{be^{2\ln a-x}}{e^{2\ln a-x}+a}$	**vereinfachen**
$= b - \frac{be^{2\ln a-x}}{e^{2\ln a-x}+a}$	**Definition negativer Exponenten**
$= b - \frac{\frac{be^{2\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x}+a}$	**Im Nenner Bruch und Zahl gleichnamig machen**
$= b - \frac{\frac{ba^2}{e^x}}{\frac{a^2}{e^x}+\frac{ae^x}{e^x}}$	**Im Nenner : Brüche addieren**
$= b - \frac{\frac{ba^2}{e^x}}{\frac{a^2+ae^x}{e^x}}$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)**
$= b - \frac{ba^2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{a^2+ae^x}$	**Kürze : e^x**
$= b - \frac{ba^2}{a^2+ae^x}$	**Kürze : a**
$= b - \frac{ba}{a+e^x}$	**Auf Hauptnenner bringen**
$= \frac{b\left(a+e^x\right)}{a+e^x} - \frac{ba}{a+e^x}$	**Bruch subtrahieren**
$= \frac{ba+be^x-ba}{a+e^x}$	**vereinfachen**
$\frac{be^x}{e^x+a} = \frac{be^x}{a+e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(\ln a \,/\, \frac{b}{2}\right)$ ist.

Lösung zu 4e – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x)=\frac{be^{2x}}{e^{2x}+a} \quad \text{und} \quad P=\left(\frac{\ln a}{2},\frac{b}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0=-f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $\mathbf{f(x_0+x)-y_0}$ und auf der nächsten Seite $\mathbf{-f(x_0-x)+y_0}$ und vergleichen beide Werte:

$f\left(\frac{\ln a}{2}+x\right)-\frac{b}{2}$	$=\frac{be^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}+x\right)}}{e^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}+x\right)}+a}-\frac{b}{2}$	**Exponent vereinfachen**
	$=\frac{be^{\ln a+2x}}{e^{\ln a+2x}+a}-\frac{b}{2}$	**Potenzgesetz anwenden**
	$=\frac{be^{\ln a}e^{2x}}{e^{\ln a}e^{2x}+a}-\frac{b}{2}$	$\mathbf{e^{\ln a}=a}$
	$=\frac{bae^{2x}}{ae^{2x}+a}-\frac{b}{2}$	**Kürze : a**
	$=\frac{be^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{b}{2}$	**auf Hauptnenner bringen**
	$=\frac{2be^{2x}}{2\left(e^{2x}+1\right)}-\frac{b\left(e^{2x}+1\right)}{2\left(e^{2x}+1\right)}$	**Bruch subtrahieren**
	$=\frac{2be^{2x}-be^{2x}-b}{2\left(e^{2x}+1\right)}$	**vereinfachen**
	$=\frac{be^{2x}-b}{2\left(e^{2x}+1\right)}$	**Klammer auflösen**
	$=\frac{be^{2x}-b}{2e^{2x}+2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f\left(\frac{\ln a}{2}-x\right)+\frac{b}{2} = -\frac{be^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}-x\right)}}{e^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}-x\right)}+a}+\frac{b}{2}$	**Exponent vereinfachen**
$= -\frac{be^{\ln a-2x}}{e^{\ln a-2x}+a}+\frac{b}{2}$	**Definition für "negative Exponenten" anwenden**
$= -\frac{b\,\frac{e^{\ln a}}{e^{2x}}}{\frac{e^{\ln a}}{e^{2x}}+a}+\frac{b}{2}$	**Im Nenner den Hauptnenner bilden**
$= -\frac{\frac{ba}{e^{2x}}}{\frac{a}{e^{2x}}+\frac{ae^{2x}}{e^{2x}}}+\frac{b}{2}$	**auf einen Bruch bringen**
$= -\frac{\frac{ba}{e^{2x}}}{\frac{a+ae^{2x}}{e^{2x}}}+\frac{b}{2}$	**Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)**
$= -\frac{ba}{e^{2x}}\cdot\frac{e^{2x}}{a+ae^{2x}}+\frac{b}{2}$	**kürze e^{2x} und a**
$= -\frac{b}{1+e^{2x}}+\frac{b}{2}$	**Brüche gleichnamig machen**
$= -\frac{2b}{2\left(1+e^{2x}\right)}+\frac{b\left(1+e^{2x}\right)}{2\left(1+e^{2x}\right)}$	**Brüche addieren**
$= \frac{b\left(1+e^{2x}\right)-2b}{2\left(1+e^{2x}\right)}$	**Klammer auflösen**
$= \frac{b+be^{2x}-2b}{2\left(1+e^{2x}\right)}$	**vereinfachen**
$= \frac{be^{2x}-b}{2+2e^{2x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P\left(\frac{\ln a}{2}\ /\ \frac{b}{2}\right)$.

Lösung zu 4e – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x)=\frac{be^{2x}}{e^{2x}+a} \quad \text{und} \quad P=\left(\frac{\ln a}{2},\frac{b}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel **$f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$**

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\frac{be^{2x}}{e^{2x}+a} = 2\cdot\frac{b}{2}-\frac{be^{2\cdot\left(2\cdot\frac{\ln a}{2}-x\right)}}{e^{2\cdot\left(2\cdot\frac{\ln a}{2}-x\right)}+a}$$

Exponenten vereinfachen

$$= b-\frac{be^{2\ln a-2x}}{e^{2\ln a-2x}+a}$$

Definition negativer Exponenten anwenden

$$= b-\frac{b\frac{e^{2\ln a}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^{2x}}+a}$$

Vereinfache : $e^{2\ln a}=\left(e^{\ln a}\right)^2=a^2$

Im Nenner den beide Brüche gleichnamig machen.

$$= b-\frac{\frac{ba^2}{e^{2x}}}{\frac{a^2}{e^{2x}}+\frac{ae^{2x}}{e^{2x}}}$$

Im Nenner Brüche addieren

$$= b-\frac{\frac{ba^2}{e^{2x}}}{\frac{a^2+ae^{2x}}{e^{2x}}}$$

Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)

$$= b-\frac{ba^2}{e^{2x}}\cdot\frac{e^{2x}}{a^2+ae^{2x}}$$

Kürze : e^{2x}

$$= b-\frac{ba^2}{a^2+ae^{2x}}$$

Kürze : a

$$= b-\frac{ba}{a+e^{2x}}$$

Auf Hauptnenner bringen

$$= \frac{b\left(a+e^{2x}\right)}{a+e^{2x}}-\frac{ba}{a+e^{2x}}$$

Gleichnamige Brüche subtrahieren

$$= \frac{b\left(a+e^{2x}\right)-ba}{a+e^{2x}}$$

vereinfachen

$$\frac{be^{2x}}{e^{2x}+a} = \frac{be^{2x}}{a+e^{2x}}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(\frac{\ln a}{2}/\frac{b}{2}\right)$ ist.