Übungen zu Wurzeln III

A.Nenner rational machen: <u>Nenner ist Quadratwurzel</u>:

1.) $\frac{42}{\sqrt{21}} =$ 2.) $\frac{45}{3\sqrt{15}} =$ 3.) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} =$ 4.) $\frac{abc}{\sqrt{abc}} =$ 5.) $\frac{7}{2\sqrt{3}} =$

6.) $\frac{a}{\sqrt{a}} =$ 7.) $\frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} =$ 8.) $\frac{6}{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}} =$ 9.) $\sqrt{\frac{2}{3}} =$ 10.) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}} =$

B.Nenner rational machen: <u>Nenner ist höhere Wurzel</u>:

1.) $\frac{21}{\sqrt[3]{7}} =$ 2.) $\frac{\sqrt[12]{9}}{2\sqrt[6]{3}} =$ 3.) $\frac{a}{6\sqrt[4]{5}} =$ 4.) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} =$ 5.) $\frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[4]{7}} =$ 6.) $\frac{14\sqrt[2]{2}}{2\sqrt[3]{7}} =$

C.Nenner rational machen: <u>Nenner ist Summe aus Quadratwurzeln</u>

1.) $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} =$ 2.) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} =$ 3.) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{21}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} =$ 4.) $\frac{3\sqrt{5}-5}{3-\sqrt{5}} =$ 5.) $\frac{21\sqrt{5}+7\sqrt{35}}{3+\sqrt{7}} =$

D.Nenner rational machen: <u>Nenner ist Summe aus drei Quadratwurzeln</u>

1.) $\frac{17-10\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$ 2.) $\frac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}} =$ 3.) $\frac{30}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\sqrt{30}} =$

E.Nenner rational machen: <u>Nenner ist Wurzel aus Wurzel(n)</u>

1.) $\frac{31}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}} =$ 2.) $\frac{7\sqrt{5}+3\sqrt{10}}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}} =$ 3.) $\frac{15\sqrt{2}+35\sqrt{10}}{\sqrt{3+7\sqrt{5}}} =$ 4.) $\frac{7+2\sqrt{11}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} =$

5.) $\frac{127}{\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}} =$ 6.) $\frac{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}} =$ 7.) $\frac{14\sqrt{10}-4\sqrt{6}}{\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}} =$ 8.) $\frac{11\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}} =$

Die Lösungen befinden sich auf den folgenden Blättern

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu A1-A5:

Lösung zu 1:

Zähler und Nenner mit $\sqrt{21}$ erweitern:

$$\frac{42}{\sqrt{21}}=\frac{42\sqrt{21}}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}}=\frac{42\sqrt{21}}{\left(\sqrt{21}\right)^2}=\frac{\cancel{21}\cdot 2\cdot\sqrt{21}}{\cancel{21}}=2\sqrt{21}$$

Lösung zu 2:

Zähler und Nenner mit $\sqrt{15}$ erweitern:

$$\frac{45}{3\sqrt{15}}=\frac{45\sqrt{15}}{3\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{45\cdot\sqrt{15}}{3\cdot 15}=\frac{\cancel{45}\sqrt{15}}{\cancel{45}}=\sqrt{15}$$

Lösung zu 3:

Zähler und Nenner mit $\sqrt{9}$ erweitern:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{7\cdot 9}}{\left(\sqrt{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{63}}{9}=$$

Mit Hilfe des teilweisen Radizierens kann der Term noch weiter vereinfacht werden:

$$\frac{\sqrt{3^2\cdot 7}}{9}=\frac{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7}}{9}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{9}=\frac{\cancel{3}\sqrt{7}}{\cancel{3}\cdot 3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Lösung zu 4:

Zähler und Nenner mit $\sqrt{abc}$ erweitern:

$$\frac{abc}{\sqrt{abc}}=\frac{abc\sqrt{abc}}{\sqrt{abc}\cdot\sqrt{abc}}=\frac{\cancel{abc}\sqrt{abc}}{\cancel{abc}}=\sqrt{abc} \qquad abc>0$$

Lösung zu 5 :

Mit $\sqrt{3}$ erweitern:

$$\frac{7}{2\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu A6-A10:

Lösung zu 6:

Mit $\sqrt{a}$ erweitern:

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{a} = \frac{\cancel{a} \cdot \sqrt{a}}{\cancel{a}} = \sqrt{a} \qquad \text{mit: } a > 0$$

Lösung zu 7:

Diese Aufgabe hat die besondere Eigenschaft, daß die

beiden Wurzeln erst zusammengefaßt werden müssen.

Dabei hilft das Gesetz über die Multiplikation von Wurzeln:

$$\frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{3 \cdot 7}} = \frac{7}{\sqrt{21}}$$

Nun (wie üblich) mit $\sqrt{21}$ erweitern:

$$\frac{7}{\sqrt{21}} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{\cancel{7} \cdot \sqrt{21}}{\underbrace{\cancel{21}}_{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Lösung zu 8:

Zuerst wieder Wurzeln zusammenfassen:

$$\frac{6}{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5}} = \frac{6}{6 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Nun mit $\sqrt{10}$ erweitern:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Lösung zu 9:

Hier helfen die Regeln "Division von Wurzeln" und "Radizieren von Wurzeln":

Diese Aufgabe hat die besondere Eigenschaft, daß der ganze Bruch unter

einer Wurzel steht. Hier hilft das Gesetz über die Division von Wurzeln:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Lösung zu 10:

Hier helfen die Regeln "Division von Wurzeln" und "Radizieren von Wurzeln":

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}$$

Nun mit $\sqrt{5}$ erweitern. Dann Wurzelexpontent erweitern (Wurzeln zusammenfassen):

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{5} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 5^2}}{5} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 5^2}}{5} = \frac{\sqrt[4]{50}}{5}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu B1-B3:

Lösung zu 1:

Bruch mit $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2$ erweitern:

$$\frac{21}{\sqrt[3]{7}} = \frac{21\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{7}\right)^1\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}_{\text{1.Potenzgesetz anwenden}}} = \frac{21\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3}_{\text{Radizieren und Potenzieren mit 3 heben sich auf}}} = \frac{7\cdot 3\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{7} = \frac{\cancel{7}\cdot 3\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\cancel{7}}$$

Die Reihenfolge von Potenzieren und Radizieren ist beliebig:

$$3\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = 3\sqrt[3]{7^2} = 3\sqrt[3]{49}$$

Lösung zu 2:

Bruch mit $\left(\sqrt[6]{3}\right)^5$ erweitern:

$$\frac{\sqrt[12]{9}}{2\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[12]{9}\cdot\overbrace{\left(\sqrt[6]{3}\right)^5}^{\text{3.Wurzelgesetz}}}{2\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^5} = \frac{\overbrace{\sqrt[12]{3^2}}^{\text{Wurzel-exponent kürzen}}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{2\cdot\underbrace{\left(\sqrt[6]{3}\right)^6}_{\text{Definition der Wurzel: }\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a}} = \frac{\overbrace{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{3^5}}^{\text{1.Wurzelgesetz anwenden}}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt[6]{3\cdot 3^5}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt[6]{3^6}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Lösung zu 3:

Bruch mit $\left(\sqrt[4]{5}\right)^3$ erweitern. Der Nenner

$$\frac{a}{6\sqrt[4]{5}} = \frac{a\bullet\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}{6\sqrt[4]{5}\bullet\left(\sqrt[4]{5}\right)^3} = \frac{\ldots}{6\left(\sqrt[4]{5}\right)^4} = \frac{\ldots}{6\bullet 5} = \frac{a\bullet\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}{30} = \frac{a\bullet\sqrt[4]{5^3}}{30}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu B4-B6:

Lösung zu 4:

Bruch mit $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ erweitern:

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{...}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{...}{2} = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2} = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

Die Wurzelexponent erweitern. Dadurch können die
Wurzeln unter einen Bruchstrich geschrieben werden:

$$\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{\left(2^2\right)^4}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^8}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2^3\cdot 2^8}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2^{3+8}}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{2} = \frac{\sqrt[12]{2048}}{2}$$

Lösung zu 5:

Bruch mit $\left(\sqrt[4]{7}\right)^3$ erweitern:

$$\frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[4]{7}} = \frac{\sqrt[2]{5}\cdot\left(\sqrt[4]{7}\right)^3}{\sqrt[4]{7}\cdot\left(\sqrt[4]{7}\right)^3} = \frac{...}{\left(\sqrt[4]{7}\right)^4} = \frac{\sqrt[2]{5}\cdot\left(\sqrt[4]{7}\right)^3}{7} = \frac{\sqrt[2]{5}\cdot\sqrt[4]{7^3}}{7}$$

In der linken Wurzel den Wurzelexponent erweitern. Dadurch
können die Wurzeln unter einen Bruchstrich geschrieben werden:

$$\frac{\sqrt[2]{5}\cdot\sqrt[4]{7^3}}{7} = \frac{\sqrt[4]{5^2}\cdot\sqrt[4]{7^3}}{7} = \frac{\sqrt[4]{5^2\cdot 7^3}}{7} = \frac{\sqrt[4]{8575}}{7}$$

Lösung zu 6:

Bruch mit $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2$ erweitern:

$$\frac{14\sqrt[2]{2}}{2\sqrt[3]{7}} = \frac{14\sqrt[2]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{2\sqrt[3]{7}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2} = \frac{...}{2\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2} = \frac{14\cdot\sqrt[2]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{14} = \frac{\cancel{14}\cdot\sqrt[2]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\cancel{14}} = \sqrt[2]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2$$

Die Wurzeln können noch unter ein gemeinsames Wurzelzeichen gebracht werden:

$$\sqrt[2]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = \sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{\left(7^2\right)^2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 7^4} = \sqrt[6]{19208}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu C1-C3:

Lösung zu 1:

Den Zähler und Nenner mit $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$ erweitern.
Dadurch wird der Nenner zum 3. Binom:

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

Für die beiden Wurzeln im Nenner gilt, daß sich Radizieren und Potenzieren aufheben, wenn der Exponent gleich dem Wurzelexponenten ist:

$$\frac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5}=\frac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

Lösung zu 2:

Zähler und Nenner müssen mit $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$ multipliziert werden:

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}=$$

Vereinfachen, u.a. mit Hilfe des 1.Wurzelgesetzes:

$$\frac{7+2\sqrt{7}\sqrt{5}+5}{2}=\frac{12+2\sqrt{7}\sqrt{5}}{2}=\frac{12+2\sqrt{7\cdot 5}}{2}=\frac{12+2\sqrt{35}}{2}=\frac{12}{2}+\frac{2\sqrt{35}}{2}=6+\sqrt{35}=$$

Lösung zu 3:

Zähler und Nenner müssen mit $\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)$ multipliziert werden.
Dadurch wird der Nenner rational, und fällt (hier) sogar weg (weil er gleich 1 ist):

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{21}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{24}-\sqrt{21}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)}=\frac{\left(\sqrt{24}-\sqrt{21}\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{24}-\sqrt{21}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{24}-\sqrt{21}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)}{1}=$$

Nun den Zähler $\left(\sqrt{24}-\sqrt{21}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)$ ausmultiplizieren:

$$\sqrt{24}\cdot\sqrt{8} \quad + \quad \sqrt{24}\cdot\sqrt{7} \quad - \quad \sqrt{21}\cdot\sqrt{8} \quad - \quad \sqrt{21}\cdot\sqrt{7}=$$

$$\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^3} \quad + \quad \sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{7} \quad - \quad \sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{2^3} \quad - \quad \sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{7}=$$

$$\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^3} \quad + \quad \sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7} \quad - \quad \sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2^3} \quad - \quad \sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=$$

Den Faktor $\sqrt{3}$ kann man ausklammern:

$$\sqrt{3}\bullet\left(\underbrace{\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2^3}}_{\left(\sqrt{2^3}\right)^2=2^3=8}+\underbrace{\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{2^3}}_{\sqrt{2^3}\left(\sqrt{7}-\sqrt{7}\right)=0}-\underbrace{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}_{\left(\sqrt{7}\right)^2=7}\right)=\sqrt{3}\cdot(8+0-7)=\sqrt{3}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu C4-C5:

Lösung zu 4:

Man muß Zähler und Nenner mit $(3+\sqrt{5})$ erweitern. Der Nenner wird reell:

$$\frac{3\sqrt{5}-5}{3-\sqrt{5}}=\frac{(3\sqrt{5}-5)\cdot(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}=\frac{(3\sqrt{5}-5)\cdot(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{(3\sqrt{5}-5)\cdot(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{(3\sqrt{5}-5)\cdot(3+\sqrt{5})}{4}$$

Nun wird der Zähler ausmultipliziert:

$$\frac{(3\sqrt{5}-5)\cdot(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3\cdot3\sqrt{5}+3\cdot\overbrace{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}^{\substack{\text{1.Wurzelgesetz}\\ \text{anwenden:}}}-5\cdot3-5\sqrt{5}}{4}=\frac{9\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5\cdot5}-15-5\sqrt{5}}{4}=$$

Nach ein paar weiteren Vereinfachungen erhält man die Lösung:

$$\frac{9\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{25}-15-5\sqrt{5}}{4}=\frac{9\sqrt{5}\overbrace{+15-15}^{=0}-5\sqrt{5}}{4}=\frac{9\sqrt{5}-5\sqrt{5}}{4}=\frac{4\sqrt{5}}{4}=\frac{\cancel{4}\sqrt{5}}{\cancel{4}}=\sqrt{5}$$

Lösung zu 5:

Man muß Zähler und Nenner mit $(3-\sqrt{7})$ erweitern. Der Nenner wird reell:

$$\frac{21\sqrt{5}+7\sqrt{35}}{3+\sqrt{7}}=\frac{(21\sqrt{5}+7\sqrt{35})\cdot(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})\cdot(3-\sqrt{7})}=\frac{(21\sqrt{5}+7\sqrt{35})\cdot(3-\sqrt{7})}{9-(\sqrt{7})^2}=\frac{(21\sqrt{5}+7\sqrt{35})\cdot(3-\sqrt{7})}{2}$$

Das Zwischenergebnis schreiben wir nochmal auf. Dann wird der Zähler ausmultipliziert:

$$\frac{(21\sqrt{5}+7\sqrt{35})\cdot(3-\sqrt{7})}{2}=\frac{\overbrace{3\cdot21\sqrt{5}}^{63\sqrt{5}}\quad-\overbrace{21\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}^{21\cdot\sqrt{35}}\quad+21\sqrt{35}\quad-7\cdot\overbrace{\sqrt{35}}^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}\cdot\sqrt{7}}{2}=$$

$$=\frac{63\sqrt{5}\quad-21\cdot\sqrt{35}\quad+21\sqrt{35}\quad-7\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{2}=$$

Zwei der Summanden heben sich auf. Den 4.Summanden vereinfachen:

$$\frac{63\sqrt{5}\cancel{-21\cdot\sqrt{35}}\ \cancel{+21\sqrt{35}}-7\cdot\sqrt{5}\cdot\overbrace{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}^{\substack{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\\ \sqrt{7\cdot7}=\\ \sqrt{49}=7}}}{2}=\frac{63\sqrt{5}-7\cdot\sqrt{5}\cdot7}{2}$$

Dann die Subtraktion im Zähler durchführen:

$$\frac{63\sqrt{5}-49\sqrt{5}}{2}=\frac{63\sqrt{5}-49\sqrt{5}}{2}=\frac{14\sqrt{5}}{2}=7\sqrt{5}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu D1:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational werden:

$$\frac{17-10\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$$

Bruch mit $\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ erweitern. Nenner wird zum 3.Binom: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ **:**

$$\frac{17-10\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\underbrace{\sqrt{15}-\sqrt{5}}_{a}+\underbrace{\sqrt{3}}_{b}\right)\cdot\left(\underbrace{\sqrt{15}-\sqrt{5}}_{a}-\underbrace{\sqrt{3}}_{b}\right)}=\frac{\ldots}{\underbrace{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)^2}_{a^2}-\underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2}_{b^2}}=$$

$$\frac{\ldots}{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)^2-3}=\frac{\ldots}{15-2\sqrt{15}\sqrt{5}+5-3}=\frac{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{17-10\sqrt{3}}=$$

Den neuen Nenner wieder zum Binom machen, indem wir Zähler und Nenner mit $\left(17+10\sqrt{3}\right)$ multiplizieren:

$$\frac{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{-11}=$$

Nun können wir den Zähler ausmultiplizieren, zuerst die beiden ersten Klammern:

$$\frac{\left(17-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{-11}=$$

$$\frac{\left(17\sqrt{15}-17\sqrt{5}-17\sqrt{3}-10\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}+10\sqrt{3}\sqrt{5}+10\sqrt{3}\sqrt{3}\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{-11}=$$

$$\frac{\left(17\sqrt{15}-17\sqrt{5}-17\sqrt{3}\quad-30\sqrt{5}\quad+10\sqrt{15}\quad+30\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{-11}=$$

Gleiche Wurzeln in der linken Klammer addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{\left(17\sqrt{15}-47\sqrt{5}-17\sqrt{3}+10\sqrt{15}+30\right)\cdot\left(17+10\sqrt{3}\right)}{-11}=$$

Jetzt die beiden letzten verbliebenen Klammern ausmultiplizieren:

$$\frac{289\sqrt{15}+170\sqrt{45}-799\sqrt{5}-470\sqrt{15}-289\sqrt{3}-170\sqrt{9}+170\sqrt{15}+100\sqrt{45}+510+300\sqrt{3}}{-11}=$$

Gleiche Wurzeln addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{270\sqrt{45}-11\sqrt{15}-170\sqrt{9}-799\sqrt{5}+11\sqrt{3}+510}{-11}=$$

Die Wurzeln $\sqrt{45}$ muß teilweise radiziert werden: $\sqrt{45}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

$$\frac{\overbrace{270\sqrt{45}}^{810\sqrt{5}}-11\sqrt{15}-\overbrace{170\sqrt{9}}^{\sqrt{9}=3}-799\sqrt{5}+11\sqrt{3}+510}{-11}=\frac{810\sqrt{5}\quad-11\sqrt{15}\quad-510\quad-799\sqrt{5}+11\sqrt{3}+510}{-11}=$$

Gleiche Wurzeln addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{-11\sqrt{15}\cancel{-510}+11\sqrt{5}+11\sqrt{3}\cancel{+510}}{-11}=\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu D2:

Im folgenden Bruch soller der Nenner rational werden:

$$\frac{12}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}=$$

Den Bruch mit $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)$ erweitern. Nenner wird zum 3.Binom (a+b)$\cdot$(a-b)=a^2-b^2:

$$\frac{12\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)}=\frac{12\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2-30}=$$

Den Nenner nun vereinfachen. Dabei gilt: $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$ ist ein 1.Binom:

$$\frac{12\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)}{12+12\sqrt{2}\sqrt{3}+18-30}=\frac{\cancel{12}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)}{\cancel{12}\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=$$

Nun den Bruch mit $\sqrt{6}$ erweitern. Dadurch wird der Zähler rational:

$$\frac{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=$$

Den Zähler vereinfachen, indem wir die Klammer auflösen (ausmultiplizieren):

$$\frac{2\sqrt{6}\sqrt{3}+3\sqrt{6}\sqrt{2}-\sqrt{6}\sqrt{30}}{6}=\frac{2\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{180}}{6}=$$

$$\frac{2\overbrace{\sqrt{18}}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}}+3\overbrace{\sqrt{12}}^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}}-\overbrace{\sqrt{180}}^{\sqrt{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sqrt{5}=6\sqrt{5}}}{6}=$$

$$\frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6\sqrt{5}}{6}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu D3:

Im folgenden Bruch soller der Nenner rational werden:

$$\frac{30}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\sqrt{30}}=$$

Den Bruch mit $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)$ erweitern. Nenner wird zum 3.Binom (a+b) $\cdot$ (a-b)=a^2-b^2:

$$\frac{30\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)}{\left(\underbrace{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}_{a}\underbrace{+}_{+}\underbrace{2\sqrt{30}}_{b}\right)\cdot\left(\underbrace{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}_{a}\underbrace{-}_{-}\underbrace{2\sqrt{30}}_{b}\right)}=\frac{\dots}{\underbrace{\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}\right)^2}_{a^2}\underbrace{-}_{-}\underbrace{\left(2\sqrt{30}\right)^2}_{b^2}}=$$

$$\frac{\dots}{\underbrace{9\cdot5+2\cdot3\cdot5\sqrt{5}\sqrt{3}+25\cdot3}_{a^2}\underbrace{-}_{-}\underbrace{4\cdot30}_{b^2}}=\frac{\dots}{\underbrace{45+30\sqrt{5}\sqrt{3}+75}_{a^2}\underbrace{-}_{-}\underbrace{120}_{b^2}}=\frac{30\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)}{30\sqrt{15}}=$$

Den neuen Nenner mit $\sqrt{15}$ erweitern. Dadurch wird der Nenner rational:

$$\frac{30\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)\sqrt{15}}{30\sqrt{15}\sqrt{15}}=\frac{\dots}{30\cdot15}=\frac{30\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)\sqrt{15}}{450}=$$

Nun den Zähler vereinfachen, indem wir die Klammerr ausmultiplizieren.

$$\frac{30\sqrt{15}\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{30}\right)}{450}=\frac{30\sqrt{15}\cdot3\sqrt{5}+30\sqrt{15}\cdot5\sqrt{3}-30\sqrt{15}\cdot2\sqrt{30}}{450}=$$

$$\frac{90\sqrt{15}\sqrt{5}+150\sqrt{15}\sqrt{3}+60\sqrt{15}\sqrt{30}}{450}=\frac{90\sqrt{3}\overbrace{\sqrt{5}\sqrt{5}}^{5}+150\sqrt{5}\overbrace{\sqrt{3}\sqrt{3}}^{3}-60\overbrace{\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}^{3\cdot5\sqrt{2}}}{450}=$$

$$\frac{450\sqrt{3}+450\sqrt{5}-900\sqrt{2}}{450}=\frac{\cancel{450}\sqrt{3}+\cancel{450}\sqrt{5}-\overbrace{\cancel{900}}^{-2}\sqrt{2}}{450}=$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E1:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{31}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}} =$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner,

indem wir den Bruch mit $\sqrt{7+3\sqrt{2}}$ erweitern:

$$\frac{31\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}\quad\sqrt{7+3\sqrt{2}}} = \frac{31\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{7+3\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{31\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{7+3\sqrt{2}}$$

Im 2.Schritt beseitigen wir die übrig gebliebene Wurzel im Nenner, indem

wir den Bruch mit $\left(7-3\sqrt{2}\right)$ erweitern. Der Nenner wird dann zum 3.Binom:

$$\frac{31\sqrt{7+3\sqrt{2}}\cdot\left(7-3\sqrt{2}\right)}{7+3\sqrt{2}\cdot\left(7-3\sqrt{2}\right)} = \frac{\ldots}{7^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\ldots}{49-18} = \frac{31\sqrt{7+3\sqrt{2}}\left(7-3\sqrt{2}\right)}{31} =$$

Nun ist der Nenner rational. Der Bruch kann aber noch vereinfacht werden.

$$\frac{\cancel{31}\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}\bullet\left(7-3\sqrt{2}\right)}{\cancel{31}} = \sqrt{7+3\sqrt{2}}\bullet\left(7-3\sqrt{2}\right) =$$

Wir bringen die Klammer unter die Wurzel, wodurch sich ein 3.Binom ergibt:

$$\sqrt{7+3\sqrt{2}}\bullet\sqrt{\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(7+3\sqrt{2}\right)\left(7-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{(49-18)\left(7-3\sqrt{2}\right)} =$$

$$\sqrt{31\left(7-3\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\left(217-91\sqrt{2}\right)}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E2:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{7\sqrt{5}+3\sqrt{10}}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\sqrt{7+3\sqrt{2}}$ erweitern:

$$\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{\sqrt{7+3\sqrt{2}}\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}}=\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{7+3\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{7+3\sqrt{2}}$$

Im 2.Schritt beseitigen wir die übrig gebliebene Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\left(7-3\sqrt{2}\right)$ erweitern. Der Nenner wird dann zum 3.Binom:

$$\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{7+3\sqrt{2}}\cdot\left(7-3\sqrt{2}\right)}{7+3\sqrt{2}\cdot\left(7-3\sqrt{2}\right)}=\frac{\dots}{7^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\dots}{49-18}=\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{7+3\sqrt{2}}\left(7-3\sqrt{2}\right)}{31}=$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Wir multiplizieren die beiden Klammern aus:

$$\frac{\left(7\sqrt{5}+3\sqrt{10}\right)\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}\bullet\left(7-3\sqrt{2}\right)}{31}=$$

$$\frac{\left(49\sqrt{5}-\cancel{21\sqrt{10}}+\cancel{21\sqrt{10}}-9\sqrt{10}\sqrt{2}\right)\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{31}=$$

$$\frac{\left(49\sqrt{5}-18\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{31}=$$

$$\frac{\cancel{31}\sqrt{5}\bullet\sqrt{7+3\sqrt{2}}}{\cancel{31}}=\sqrt{5\left(7+3\sqrt{2}\right)}=\sqrt{35+15\sqrt{2}}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E3:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{15\sqrt{2}+35\sqrt{10}}{\sqrt{3+7\sqrt{5}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\sqrt{3+7\sqrt{5}}$ erweitern:

$$\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}=\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{3+7\sqrt{5}}=$$

Im 2.Schritt beseitigen wir die übrig gebliebene Wurzel im Nenner, indem
wir den Bruch mit $\left(3-7\sqrt{5}\right)$ erweitern. Der Nenner wird dann zum 3.Binom:

$$\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\left(3-7\sqrt{5}\right)}{\left(3+7\sqrt{5}\right)\left(3-7\sqrt{5}\right)}=\frac{\dots}{9^2-\left(7\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\dots}{9-245}=\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\left(3-7\sqrt{5}\right)}{-236}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Zum praktischeren Rechnen, ist es sehr ratsam aus der ersten Klammer die Zahl 5 auszuklammern:

$$\frac{\left(15\sqrt{2}+35\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\left(3-7\sqrt{5}\right)}{-236}=\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+7\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\cdot\left(3-7\sqrt{5}\right)}{-236}$$

Nun multiplizieren wir die beiden Klammern aus:

$$\frac{5\cdot\left(3\sqrt{2}+7\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)\cdot\left(3-7\sqrt{5}\right)}{-236}=\frac{5\cdot\left(9\sqrt{2}-21\sqrt{10}+21\sqrt{10}-49\sqrt{50}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{-236}=$$

$$\frac{5\cdot\left(9\sqrt{2}\cancel{-21\sqrt{10}}+\cancel{21\sqrt{10}}-49\sqrt{50}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{-236}=\frac{5\cdot\left(9\sqrt{2}-49\sqrt{2\cdot 25}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{-236}=$$

$$\frac{5\cdot\left(9\sqrt{2}-49\cdot 5\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{-236}=\frac{5\cdot\left(-236\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{-236}=\frac{5\cdot\left(\cancel{-236}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3+7\sqrt{5}}\right)}{\cancel{-236}}=$$

$$5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+7\sqrt{5}}=5\cdot\sqrt{2\left(3+7\sqrt{5}\right)}=5\cdot\sqrt{6+14\sqrt{5}}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E4:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{7+2\sqrt{11}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ erweitern:

$$\frac{7+2\sqrt{11}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}=\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}=\frac{\dots}{\left(\sqrt{7+2\sqrt{11}}\right)^2}=\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{7+2\sqrt{11}}=$$

Im 2.Schritt beseitigen wir die übrig gebliebene Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\left(7-2\sqrt{11}\right)$ erweitern. Der Nenner wird dann zum 3.Binom:

$$\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{7+2\sqrt{11}}=\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}\bullet\left(7-2\sqrt{11}\right)}{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\left(7-2\sqrt{11}\right)}=\frac{\dots}{(7)^2-\left(2\sqrt{11}\right)^2}=$$

$$\frac{\dots}{(7)^2-\left(2^2\cdot 11\right)}=\frac{\dots}{49-44}=\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}\bullet\left(7-2\sqrt{11}\right)}{5}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Die beiden Klammern bilden zusammen das 3.Binom:

$$\frac{\left(7+2\sqrt{11}\right)\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}\bullet\left(7-2\sqrt{11}\right)}{5}=\frac{\left[(7)^2-\left(2\sqrt{11}\right)^2\right]\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{5}=$$

$$\frac{\left[(7)^2-\left(2^2\cdot 11\right)\right]\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{5}=\frac{[49-44]\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{5}=\frac{5\bullet\sqrt{7+2\sqrt{11}}}{5}=\sqrt{7+2\sqrt{11}}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E5:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{\mathbf{127}}{\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner, indem wir den Bruch mit $\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ erweitern:

$$\frac{127}{\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}}=\frac{127\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}}{\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}}=\frac{\ldots}{\left(\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{127\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}}{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$$

In zweiten Schritt multiplizieren wir den Bruch mit $\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)$. Dadurch wird der Nenner zum 3.Binom und rational:

$$\frac{127\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}{\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}==\frac{\ldots}{\left(7\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\frac{\ldots}{(49\cdot 3)-(4\cdot 5)}=\frac{\ldots}{147-20}=\frac{127\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}{127}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Dazu kürzen wir den Bruch zuerst einmal mit 127:

$$\frac{127\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}{127}=\frac{\cancel{127}\bullet\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}{\cancel{127}}=\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)$$

Nun bringen wir die Klammer unter das Wurzelzeichen:

$$\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)=\sqrt{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}\bullet\sqrt{\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)^2}$$

Nun das 3.Binom anwenden:

$$\sqrt{\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left[\left(7\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)\right]\cdot\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}=$$

$$\sqrt{\left[\left(7\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}=$$

$$\sqrt{[(49\cdot 3)-(4\cdot 5)]\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}=$$

$$\sqrt{127\bullet\left(7\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E6:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner,

indem wir den Bruch mit $\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}$ erweitern:

$$\frac{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}=\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}=\frac{\dots}{\left(\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}$$

In zweiten Schritt multiplizieren wir den Bruch mit $\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)$.

Dadurch wird der Nenner zum 3.Binom und rational:

$$\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}=\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}\bullet\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)}{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)}=$$

$$\frac{\dots}{\left(5\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\dots}{175-20}=\frac{\dots}{155}=\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}\bullet\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)}{155}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.

Die beiden Klammern bilden das 3.Binom:

$$\frac{\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}\bullet\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)}{155}=\frac{\left[\left(5\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{155}=$$

$$\frac{[175-20]\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{155}=\frac{155\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{155}=\frac{\cancel{155}\bullet\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}}{\cancel{155}}=\sqrt{5\sqrt{7}-2\sqrt{5}}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E7:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{14\sqrt{10}-4\sqrt{6}}{\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner,

indem wir den Bruch mit $\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$ erweitern:

$$\frac{14\sqrt{10}-4\sqrt{6}}{\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}=\frac{\left(14\sqrt{10}-4\sqrt{6}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}=\frac{...}{\left(\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\left(14\sqrt{10}-4\sqrt{6}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$$

In zweiten Schritt multiplizieren wir den Bruch mit $\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)$.
Dadurch wird der Nenner zum 3.Binom und rational:

$$\frac{\left(14\sqrt{10}-4\sqrt{6}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}=\frac{\left(14\sqrt{10}-4\sqrt{6}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\bullet\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)}{\left(7\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\bullet\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{...}{\left(7\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{...}{245-12}=\frac{\left(14\sqrt{10}-4\sqrt{6}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\bullet\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)}{233}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Damit keine zu großen Zahlen entstehen, die man nicht mehr im Kopf berechnen
kann, klammern wir aus der ersten Klammer $2\sqrt{2}$ aus:

$$\frac{2\sqrt{2}\bullet\left(7\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\bullet\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)}{233}=\frac{2\sqrt{2}\bullet\left(7\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\bullet\left(7\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)}{233}$$

Jetzt sieht man, das die beiden Klammern das 3.Binom bilden. Wir können also weiter vereinfachen:

$$\frac{2\sqrt{2}\bullet\left[\left(7\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\right]\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{233}=\frac{2\sqrt{2}\bullet[245-12]\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{233}=\frac{2\sqrt{2}\bullet[233]\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{233}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}\bullet\cancel{[233]}\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}}{\cancel{233}}=2\sqrt{2}\bullet\sqrt{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}=2\sqrt{2\left(7\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{14\sqrt{5}-4\sqrt{3}}$$

Übungen zu Wurzeln III

Lösungen zu E8:

Im folgenden Bruch soll der Nenner rational gemacht werden:

$$\frac{11\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}=$$

Im 1.Schritt beseitigen wird die äußere Wurzel im Nenner,
indem wir den Bruch mit $\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ erweitern:

$$\frac{11\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}=\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}=\frac{\ldots}{\left(\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$\frac{\ldots}{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

In zweiten Schritt multiplizieren wir den Bruch mit $\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$.
Dadurch wird der Nenner zum 3.Binom und rational:

$$\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(11\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{\ldots}{\left(11\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\ldots}{242-12}=\frac{\ldots}{230}=\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{230}$$

Nun ist der Nenner rational. Der Zähler kann aber noch vereinfacht werden.
Aus der ersten Klammern können wir $\sqrt{5}$ ausklammern:

$$\frac{\left(11\sqrt{10}+2\sqrt{15}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{230}=\frac{\sqrt{5}\bullet\left(11\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{230}$$

Jetzt sieht man, das die beiden Klammern das 3.Binom bilden. Wir können also weiter vereinfachen:

$$\frac{\sqrt{5}\bullet\left(11\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\bullet\left(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{230}=\frac{\sqrt{5}\bullet\left[\left(11\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\right]\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{230}=$$

$$\frac{\sqrt{5}\bullet[242-12]\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{230}=\frac{\sqrt{5}\bullet230\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{230}=\frac{\sqrt{5}\bullet\cancel{230}\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}{\cancel{230}}=$$

$$\sqrt{5}\bullet\sqrt{11\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\sqrt{5\left(11\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}$$