26.Logarithmusgleichungen

Definition der Logarithmusgleichung

Eine Logarithmusgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte (x) im Numerus eines Logarithmus vorkommt:

$$\boxed{log_{10}(x) = 100}$$

Dagegen ist die folgende Gleichung keine Logarithmusgleichung, denn die Unbekannte (x) steht nicht im Numerus:

$$\boxed{log_{10} 100 = x}$$

Lösungsverfahren Nr.1: Definition des Logarithmus:

Einfache Logarithmusgleichungen mit nur einem Logarithmus kann man lösen, indem man die „Definition des Logarithmus" benutzt. Sie lautet:

Der Logarithmus ist der Exponent c mit dem man die Logarithmusbasis b potenzieren muß, um den Numerus a zu erhalten.

Als Formel geschrieben:

$$log_b a = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a$$

Mit dieser Formel kann man Logarithmusgleichungen mit einem Logarithmus lösen. Beispiel:

$$\boxed{log_2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = x}$$

Lösungsverfahren Nr 2: Vergleich der Numeri

Das Lösungsverfahren „Vergleich der Numeri" ist anwendbar, wenn eine Logarithmusfunktion aus zwei Logarithmen besteht. Seien r uns s Funktionen von x:

$$log_b r = log_b s \quad \Rightarrow \quad r = s$$

Beispiel:

$$\boxed{log_b 2x = log_b (x+3) \quad \Rightarrow \quad 2x = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x=3}$$

Wichtig: Wie bei jeder Anwendung einer Folge-Umformung (Zeichen: =>) können Lösungen hinzukommen, d.h. wir müssen eine Probe machen!

26.Logarithmusgleichungen

Lösungsverfahren Nr.3: Anwendung der Logarithmusformeln

Das Lösungsverfahren „Anwendung der Logarithmusformeln“ ist ein Verfahren, dass stets zusätzlich zu einem anderen Verfahren (wie z.B. zu den beiden vorigen) angewandt wird. Das Verfahren besteht aus dem Anwenden der folgenden drei Logarithmusformeln, die sich aus den drei Logarithmusgesetzen herleiten lassen (r,s sind Funktionen von x):

❶ $log_b r + log_b s = c \quad \Rightarrow \quad log_b (r \cdot s) = c$

❷ $log_b r - log_b s = c \quad \Rightarrow \quad log_b \left(\frac{r}{s}\right) = c$

❸ $n \cdot log_b r = c \quad \Rightarrow \quad log_b r^n = c$

Beispiel zur 1.Formel:

$$
\begin{aligned}
& log_{10} x^2 + log_{10} x^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & log_{10} (x^4) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^4 = 10^0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^4 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \pm 1 \qquad \text{Probe: Ergibt wahre Aussagen} \qquad L = \{-1, +1\}
\end{aligned}
$$

Anwendung der Formeln in umgekehrter Richtung:

Die Formeln 1 bis 3 dürfen nur in einer Richtung angewandt werden. Für die umgekehrte Richtung gibt es stattdessen die ähnlichen Formeln 4 bis 6:

❹ $log_b (r \cdot s) = c \quad \Rightarrow \quad log_b |r| + log_b |s| = c$

❺ $log_b \left(\frac{r}{s}\right) = c \quad \Rightarrow \quad log_b |r| - log_b |s| = c$

❻ $log_b r^n = c \quad \Rightarrow \quad n \cdot log_b |r| = c$

Hinweis zur Formel 6: Eigentlich sind die Betragsstriche in der Formel 6 nur nötig, wenn n gerade ist. Setzt man die Betragsstriche auf bei ungeraden n, so können Scheinlösungen entstehen, doch diese filtert man ja durch die Probe heraus.

Probe nicht vergessen !

Alle sechs Formeln sind Folge-Umformungen (Zeichen: =>). Wie bei jeder Folge-Umformung können Lösungen hinzukommen, d.h. wir dürfen nach Anwendung einer der sechs Formeln die Probe nicht vergessen.

26.Logarithmusgleichungen

Lösungsverfahren Nr.4: Substitution

Es gibt schwer lösbare und unlösbare Logarithmusgleichungen. Falls bei einer solchen Gleichung die **Logarithmen gleiche Numeri haben** , hilft oft ein Lösungsverfahren, das man „Substitution“ nennt, und auch bei anderen Gleichungsarten angewandt wird. Schema:

1. **Logarithmen durch eine neue Variable (hier: z) ersetzen**
2. **Substituierte Gleichung lösen**
3. **Rücksubstitution durchführen**

Beispiel:

$$5 \cdot log_{10}(x+2) = log_{10}(x+2) + 4$$
$$\boxed{Substituiere:\ log_{10}(x+2) = z}$$
$$5 \cdot z = z + 4$$
$$\boxed{Löse\ substituierte\ Gleichung}$$
$$z = 1$$
$$\boxed{Rücksubstituieren:}$$
$$log_{10}(x+2) = 1$$
$$x + 2 = 10^1$$
$$x = 8$$

Lösungsverfahren Nr.5: Basiswechselsatz anwenden

Anwendungsbereich: Wenn die Basen in einer Logarithmusgleichung unterschiedlich sind, dann kann man den „Basiswechselsatz“ aus der Logarithmenrechnung anwenden:

Anmerkung: Dieses Verfahren wird *zusätzlich* zu anderen Verfahren benutzt.

Gegeben:	$log_2 x = log_4(2x^2 - 64)$
Basiswechselsatz anwenden:	$log_2 x = \frac{log_2(2x^2 - 64)}{log_2 4}$
Nenner vereinfachen:	$log_2 x = \frac{log_2(2x^2 - 64)}{2}$
beide Seiten mit 2 multiplizieren:	$2 \cdot log_2 x = log_2(2x^2 - 64)$
3.Logarithmusformel anwenden:	$log_2(x^2) = log_2(2x^2 - 64)$
Numeri gleichsetzen:	$x^2 = 2x^2 - 64$
	$x^2 = 64$
	$x = \pm 8$
Probe ergibt:	$L = \{8\}$