# Logarithmusgleichungen

**50 Logarithmusgleichungen mit Ergebnissen und ausführlichen Lösungsweg**

**Auflage: Dienstag 6.6.2006**

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## 1.Einfachste Logarithmusgleichungen

| | | |
|---|---|---|
| **1a)** | $\log_{10} x = 2$ | $L=\{100\}$ |
| **1b)** | $\log_2 x = 4$ | $L=\{16\}$ |
| **1c)** | $3\log_5(5x) = 9$ | $L=\{25\}$ |
| **1d)** | $\log_3 x = 4$ | $L=\{81\}$ |
| **1e)** | $2\log_2(2x) = 6$ | $L=\{4\}$ |
| **1f)** | $\log_2 4x = 10$ | $L=\{256\}$ |
| **1g)** | $\log_5(5x) = 2$ | $L=\{5\}$ |
| **1h)** | $5\log_3 x = 15$ | $L=\{27\}$ |
| **1i)** | $\log_7(7x) = 2$ | $L=\{7\}$ |
| **1k)** | $\log_{25} x = \frac{1}{2}$ | $L=\{5\}$ |
| **1m)** | $2\log_{27} x = \frac{2}{3}$ | $L=\{3\}$ |
| **1n)** | $2\log_{16} x = \frac{1}{2}$ | $L=\{2\}$ |

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## 2.Logarithmusgleichungen mit zwei Logarithmen ohne Absolutglied

| | | |
|---|---|---|
| **2a)** | $\log_5(15x-10)=\log_5(10x+35)$ | $L=\{9\}$ |
| **2b)** | $\log_4(3x+4)=\log_4(2x+2)$ | $L=\varnothing$ |
| **2c)** | $\log_{10}(11x-10)=\log_{10}(10x)$ | $L=\{10\}$ |
| **2d)** | $\log_2(3x-1)=\log_2(2x+10)$ | $L=\{11\}$ |
| **2e)** | $\log_{10}(5x+25)=\log_{10}(8x-20)$ | $L=\{15\}$ |
| **2f)** | $\log_3(5x+2)=\log_3(3x+12)$ | $L=\{5\}$ |
| **2g)** | $2\cdot\log_2(x-1)=\log_2(3x+1)$ | $L=\{5\}$ |
| **2h)** | $2\cdot\log_2(x+1)=\log_2(3x+7)$ | $L=\{3\}$ |
| **2i)** | $2\cdot\log_3(5x-1)=\log_3(40x+1)$ | $L=\{2\}$ |
| **2k)** | $\log_{10}(20x^2+10x)=\log_{10}(50x)$ | $L=\{2\}$ |
| **2m)** | $\log_2(2x^2-4x)=\log_2(4x)$ | $L=\{4\}$ |
| **2n)** | $\log_8(15x^2+2x)=\log_8(32x)$ | $L=\{2\}$ |
| **2o)** | $\log_3(x^2+x+15)=\log_3(2x^2+2x+3)$ | $L=\{-4;\ 3\}$ |
| **2p)** | $\log_2(2x^2+3x+5)=\log_2(x^2+4x+11)$ | $L=\{-2;\ 3\}$ |
| **2q)** | $\log_5(x^2+5x+19)=\log_5(5x^2+5x+15)$ | $L=\{-1;\ 1\}$ |
| **2r)** | $\log_2(2x^2+4x+2)=\log_2(x^2+2x+17)$ | $L=\{-5;\ 3\}$ |

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## 3.Logarithmusgleichungen mit drei Logarithmen sowie Logarithmusgleichungen mit zwei Logarithmen und Absolutglied

| | | |
|---|---|---|
| **3a)** | $\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6$ | $L=\{3\}$ |
| **3b)** | $\log_3(5x-1)+\log_3(9x+9)=5$ | $L=\{2\}$ |
| **3c)** | $\log_5(10x+25)-\log_5(x-5)=2$ | $L=\{10\}$ |
| **3d)** | $\log_{10}(7x+51)+\log_{10}(15x-5)=4$ | $L=\{7\}$ |
| **3e)** | $\log_2(40x+24)-\log_2(7x+1)=3$ | $L=\{1\}$ |
| **3f)** | $\log_2(2x-2)+\log_2(x+1)=\log_2(4x+4)$ | $L=\{3\}$ |
| **3g)** | $\log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)=\log_3(2x-1)$ | $L=\{2\}$ |
| **3h)** | $\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36)$ | $L=\{100\}$ |

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## 4.Substitution

**4a)** $\dfrac{20\cdot\log_{10}(9x+46)-4}{2\cdot\log_{10}(9x+46)+2}=6$ $\qquad L=\{6\}$

**4b)** $\dfrac{9\cdot\log_{10}(40x+20)-4}{2\cdot\log_{10}(40x+20)+3}=2$ $\qquad L=\{2\}$

**4c)** $\dfrac{4\cdot\log_{10}(20x+20)+2}{4\cdot\log_{10}(20x+20)-7}=10$ $\qquad L=\{4\}$

**4d)** $\dfrac{8\cdot\log_{10}(190x+50)+3}{5\cdot\log_{10}(190x+50)-6}=3$ $\qquad L=\{5\}$

**4e)** $\dfrac{9\cdot\log_{10}(10x+10)-4}{2\cdot\log_{10}(10x+10)+3}=2$ $\qquad L=\{9\}$

**4f)** $\dfrac{5\cdot\log_{10}(2x+4)+4}{4\cdot\log_{10}(2x+4)-3}=9$ $\qquad L=\{3\}$

**4g)** $\dfrac{6\cdot\log_{10}(99x+10)+2}{\log_{10}(99x+10)-1}=10$ $\qquad L=\{10\}$

---

**4h)** $25\left[\log_{10}(x+90)\right]^2-100\log_{10}(x+90)=-100$ $\qquad L=\{10\}$

**4i)** $4\left[\log_{10}(x+95)\right]^2-16\log_{10}(x+95)=-16$ $\qquad L=\{5\}$

**4j)** $9\left[\log_{10}(x+50)\right]^2-36\log_{10}(x+50)+36=0$ $\qquad L=\{50\}$

**4k)** $16\left[\log_{10}(x+30)\right]^2-64\log_{10}(x+30)+64=0$ $\qquad L=\{70\}$

**4L)** $4\left[\log_{10}(x+80)\right]^2-16\log_{10}(x+80)+16=0$ $\qquad L=\{20\}$

---

**4m)** $x^{\log_{10}x}+100x^{-\log_{10}x}-20=0$ $\qquad L=\{\frac{1}{10};10\}$

**4n)** $x^{\log_2 x}+32x^{-\log_2 x}=18$ $\qquad L=\{\frac{1}{4};\frac{1}{2};2;4\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## 5.Logarithmusgleichungen mit Logarithmen unterschiedlicher Basis

**5a)** $\log_4\left(x^2+2x-8\right)=\log_2\left(x\right)$ $\quad$ $L=\{4\}$

**5b)** $\log_8\left(7x^2\right)-\log_2\left(x\right)=0$ $\quad$ $L=\{7\}$

**5c)** $\log_{100}\left(2x^4-10.000\right)=\log_{10}\left(x^2\right)$ $\quad$ $L=\{-10,10\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1a

Gegeben:

$\log_{10} x = 2$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus,
um die Logarithmusgleichung zu lösen:

$\log_{10} x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 10^2 = x$

Potenz ausrechnen:

$x = 100$

Probe für x=100

$\log_{10} 100 = 2$

$2 = 2$

Lösungsmenge $L = \{100\}$

## Lösung zu 1b

Gegeben:

$\log_2 x = 4$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus,
um die Logarithmusgleichung zu lösen:

$\log_2 x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = x$

Potenz ausrechnen:

$x = 16$

Probe für x=16

$\log_2 16 = 4$

$4 = 4$

Lösungsmenge: $L = \{16\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1c

Gegeben:

$3\log_5(5x) = 9$

Lösungsweg:

Beide Seiten durch 3 teilen:

$\log_5(5x) = 3$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_5(5x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 5x$

Potenz ausrechnen:

$125 = 5x$

Beide Seiten durch 5 teilen:

$25 = x$

Probe für x=25:

$3\log_5(5 \cdot 25) = 9$

$3\log_5(125) = 9$

$3 \cdot 3 = 9$

$9 = 9$

Lösungsmenge: $L = \{25\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1d

Gegeben:

$\log_3 x = 4$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus,
um die Logarithmusgleichung zu lösen:

$\log_3 x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3^4 = x$

Potenz ausrechnen:

$x = 81$

Probe für x=81

$\log_3 81 = 4$

$4 = 4$

Lösungsmenge: $L = \{81\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1e

Gegeben:

$2\log_2(2x) = 6$

Lösungsweg:

Beide Seiten durch 2 teilen:

$\log_2(2x) = 3$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_2(2x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 2x$

Potenz ausrechnen:

$8 = 2x$

Beide Seiten durch 2 teilen:

$x = 4$

Probe für x=4

$2\log_2(2 \cdot 4) = 6$

$2\log_2(8) = 6$

$2 \cdot 3 = 6$

$6 = 6$

Lösungsmenge: $L = \{4\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1f

Gegeben:

$\log_2 4x = 10$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_2(4x) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{10} = 4x$

Potenz ausrechnen:

$1024 = 4x$

Beide Seiten durch 4 teilen:

$x = 256$

Probe für x=256

$\log_2(4 \cdot 256) = 10$

$\log_2(1024) = 10$

$10 = 10$

Lösungsmenge: $L = \{256\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1g

Gegeben:

$\log_5(5x) = 2$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_5(5x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5^2 = 5x$

Potenz ausrechnen:

$25 = 5x$

Beide Seiten durch 5 teilen:

$x = 5$

Probe für $x = 5$

$\log_5(5 \cdot 5) = 2$

$\log_5(25) = 2$

$2 = 2$

Lösungsmenge: $L = \{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1h

Gegeben:

$5\log_3 x = 15$

Lösungsweg:

Beide Seiten durch 5 teilen:

$\log_3 x = 3$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_3 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = x$

Potenz ausrechnen:

$27 = x$

Probe für $x = 27$

$5\log_3 27 = 15$

$5 \cdot 3 = 15$

$15 = 15$

Lösungsmenge: $L = \{27\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1i

$\boxed{\text{Gegeben:}}$

$\log_7(7x) = 2$

$\boxed{\text{Lösungsweg:}}$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_7(7x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7^2 = 7x$

Potenz ausrechnen:

$49 = 7x$

Beide Seiten durch 7 teilen:

$x = 7$

$\boxed{\text{Probe für } x = 7}$

$\log_7(7 \cdot 7) = 2$

$\log_7(49) = 2$

$2 = 2$

$\boxed{\text{Lösungsmenge:}}$ $L = \{7\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1k

Gegeben:

$\log_{25} x = \frac{1}{2}$

Lösungsweg:

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_{25} x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 25^{\frac{1}{2}} = x$

Potenz ausrechnen:

$25^{\frac{1}{2}} = x$

$\sqrt{25} = x$

$x = 5$

Probe für $x = 5$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Lösungsmenge: $L = \{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1m

Gegeben:

$2\log_{27} x = \frac{2}{3}$

Lösungsweg:

Wir teilen beide Seiten durch 2:

$\log_{27} x = \frac{2}{3} : 2$

$\log_{27} x = \frac{2}{3 \cdot 2}$ |Bruch mit 2 kürzen

$\log_{27} x = \frac{1}{3}$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_{27} x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 27^{\frac{1}{3}} = x$

Potenz ausrechnen:

$27^{\frac{1}{3}} = x$

$\sqrt[3]{27} = x$

$3 = x$

$x = 3$

Probe für $x = 3$

$2\log_{27} x = \frac{2}{3}$

$2\log_{27} 3 = \frac{2}{3}$

$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Lösungsmenge: $L = \{3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 1n

Gegeben:

$2\log_{16} x = \frac{1}{2}$

Lösungsweg:

Wir teilen beide Seiten durch 2:

$\log_{16} x = \frac{1}{2} : 2$

$\log_{16} x = \frac{1}{2 \cdot 2} \qquad |\text{Bruch vereinfachen}$

$\log_{16} x = \frac{1}{4}$

Wir benutzen die Definition des Logarithmus:

$\log_{16} x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 16^{\frac{1}{4}} = x$

Potenz ausrechnen:

$16^{\frac{1}{4}} = x$

$\sqrt[4]{16} = x$

$2 = x$

$x = 2$

Probe für $x = 2$

$2\log_{16} 2 = \frac{1}{2}$

$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Lösungsmenge: $L = \{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2a

Gegeben:

$$\log_5(15x-10) = \log_5(10x+35)$$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$15x-10 = 10x+35$$

Alle x auf eine Seite bringen, alle Konstanten auf die andere:

$$15x-10 = 10x+35 \qquad \vert -10x$$

$$5x-10 = 35 \qquad \vert +10$$

$$5x = 45 \qquad \vert :5$$

$$x = 9$$

Probe für $x = 9$

$$\log_5(15\cdot\mathbf{9}-10) = \log_5(10\cdot\mathbf{9}+35)$$

$$\log_5 125 = \log_5 125$$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L = \{9\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2b

Gegeben:

$$\log_4(3x+4)=\log_4(2x+2)$$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$3x+4=2x+2$$

Alle x auf eine Seite bringen, alle Konstanten auf die andere:

$$\begin{aligned} 3x+4&=2x+2 && \vert -2x \\ x+4&=2 && \vert -4 \\ x&=-2 && \vert :5 \end{aligned}$$

Probe für $x=-2$

$$\log_4[3\cdot(-2)+4]=\log_4[2\cdot(-2)+2]$$

$$\log_4[-2]=\log_4[-2]$$

Diese Gleichung ist nicht definiert, und daher ist $x=-2$ keine Lösung.

Lösungsmenge:

Die Lösungsmenge ist die leere Menge:

$$L=\varnothing$$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2c

Gegeben:

$\log_{10}(11x-10)=\log_{10}(10x)$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$11x-10=10x$

Alle x auf eine Seite bringen, die Konstante auf die andere Seite:

$$
\begin{aligned}
11x-10&=10x \qquad &&|-10x\\
x-10&=0 &&|+10\\
x&=10
\end{aligned}
$$

Probe für $x=10$

$\log_{10}(11\cdot\mathbf{10}-10)=\log_{10}(10\cdot\mathbf{10})$

$\log_{10}(100)=\log_{10}(100)$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{10\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2d

Gegeben:

$\log_2(3x-1) = \log_2(2x+10)$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$3x-1 = 2x+10$

Alle x auf eine Seite bringen, die Konstante auf die andere Seite:

$3x-1 = 2x+10 \quad | -2x$

$x-1 = 10 \quad | +1$

$x = 11$

Probe für $x = 11$

$\log_2(3 \cdot \mathbf{11} - 1) = \log_2(2 \cdot \mathbf{11} + 10)$

$\log_2(32) = \log_2(32)$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L = \{11\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2e

Gegeben:

$$\log_{10}(5x+25)=\log_{10}(8x-20)$$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen
gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$5x+25=8x-20$$

Alle x auf eine Seite bringen, die Konstante auf die andere Seite:

$$5x+25=8x-20 \qquad |-5x$$

$$25=3x-20 \qquad |+20$$

$$45=3x \qquad |:3$$

$$15=x$$

Probe für $x=15$

$$\log_{10}(5\cdot\mathbf{15}+25)=\log_{10}(8\cdot\mathbf{15}-20)$$

$\log_{10}(100)=\log_{10}(100)$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{15\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2f

Gegeben:

$\log_3(5x+2) = \log_3(3x+12)$

Lösungsweg:

Wir benutzen den Satz: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$5x + 2 = 3x + 12$

Alle x auf eine Seite bringen, die Konstante auf die andere Seite:

$5x + 2 = 3x + 12 \quad | -3x$

$2x + 2 = 12 \quad | -2$

$2x = 10 \quad | :2$

$x = 5$

Probe für $x = 5$

$\log_3(5 \cdot 5 + 2) = \log_3(3 \cdot 5 + 12)$

$\log_3(27) = \log_3(27)$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L = \{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2g

Gegeben:

$$2 \cdot \log_2(x-1) = \log_2(3x+1)$$

Lösungsweg:

$$2 \cdot \log_2(x-1) = \log_2(3x+1)$$

Auf der linken Seite steht ein Faktor vor dem Logarithmus.
Um ihn zu beseitigen, benutzen wir die 3.Logarithmusformel:

$$\log_2\left[(x-1)^2\right] = \log_2(3x+1)$$

$$\log_2\left(x^2-2x+1\right) = \log_2(3x+1)$$

Nun können wir den Satz anwenden: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$x^2-2x+1=3x+1 \qquad |-3x$$

$$x^2-5x+1=1 \qquad |-1$$

$$x^2-5x=0 \qquad |\text{ x ausklammern}$$

$$x(x-5)=0$$

Probe für $x=0$

$$2 \cdot \log_2(0-1) = \log_2(3 \cdot 0+1)$$

Der Numerus auf der linken Seite ist negativ,
daher ist der Logarithmus nicht definiert,
und somit ist x=0 keine Lösung.

Probe für $x=5$

$$2 \cdot \log_2(5-1) = \log_2(3 \cdot 5+1)$$

$$2 \cdot \log_2(4) = \log_2(16)$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

4=4 **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2h

Gegeben:

$$2 \cdot \log_2(x+1) = \log_2(3x+7)$$

Lösungsweg:

$$2 \cdot \log_2(x+1) = \log_2(3x+7)$$

Auf der linken Seite steht ein Faktor vor dem Logarithmus.
Um ihn zu beseitigen, benutzen wir die 3.Logarithmusformel:

$$\log_2\left[(x+1)^2\right] = \log_2(3x+7)$$

$$\log_2\left(x^2 + 2x + 1\right) = \log_2(3x+7)$$

Nun können wir den Satz anwenden: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$x^2 + 2x + 1 = 3x + 7 \qquad |-3x$$

$$x^2 - x + 1 = 7 \qquad |-7$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad |\text{Quadratische Gleichung mit Lösungsformel lösen}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 3 \text{ oder } -2$$

Probe für $x = -2$

$$2 \cdot \log_2(\mathbf{-2} + 1) = \log_2(3 \cdot (\mathbf{-2}) + 7)$$

Der Numerus auf der linken Seite ist negativ,
daher ist der Logarithmus nicht definiert,
und somit ist $x = -2$ keine Lösung.

Probe für $x = 3$

$$2 \cdot \log_2(\mathbf{3} + 1) = \log_2(3 \cdot \mathbf{3} + 7)$$

$$2 \cdot \log_2(4) = \log_2(16)$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

4=4 **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L = \{3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2i

$\boxed{\text{Gegeben:}}$

$$2 \cdot \log_3(5x-1) = \log_3(40x+1)$$

$\boxed{\text{Lösungsweg:}}$

$$2 \cdot \log_3(5x-1) = \log_3(40x+1)$$

Auf der linken Seite steht ein Faktor vor dem Logarithmus.
Um ihn zu beseitigen, benutzen wir die 3.Logarithmusformel:

$$\log_3\left[(5x-1)^2\right] = \log_3(40x+1) \qquad \Big| \text{Linkes Argument mit Binom vereinfachen}$$

$$\log_3\left[25x^2-10x+1\right] = \log_3(40x+1)$$

Nun können wir den Satz anwenden: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$25x^2-10x+1 = 40x+1 \qquad \Big| -40x$$

$$25x^2-50x+1 = 1 \qquad \Big| -1$$

$$25x^2-50x = 0 \qquad \Big| \text{ 25x ausklammern}$$

$$25x(x-2) = 0 \qquad \Big| \text{Ein Produkt ist gleich Null, wenn ein Faktor gleich Null ist}$$

$$x = 0 \text{ oder } 2$$

$\boxed{\text{Probe für } x = 0}$

$$2 \cdot \log_3(5 \cdot 0 - 1) = \log_3(40 \cdot 0 + 1)$$

Der Numerus auf der linken Seite ist negativ,
daher ist der Logarithmus nicht definiert,
und somit ist $x = 0$ auch keine Lösung.

$\boxed{\text{Probe für } x = 2}$

$$2 \cdot \log_3(5 \cdot \mathbf{2} - 1) = \log_3(40 \cdot \mathbf{2} + 1)$$

$$2 \cdot \log_3 9 = \log_3 81$$

$2 \cdot 2 = 4$ **wahre Aussage**

$\boxed{\text{Lösungsmenge:}}$ $L = \{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2k

Gegeben:

$$\log_{10}\left(20x^2+10x\right)=\log_{10}(50x)$$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$20x^2+10x=50x \qquad | -50x$

$20x^2-40x=0 \qquad | \text{ 20x ausklammern}$

$20x(x-2)=0 \qquad |$ Ein Produkt ist gleich Null, wenn ein Faktor gleich Null ist

$x=0 \text{ oder } 2$

Probe für $x=0$

$$\log_{10}\left(20\cdot\mathbf{0}^2+10\cdot\mathbf{0}\right)=\log_{10}(50\cdot\mathbf{0})$$

Die Numeri auf beiden Seiten sind gleich Null, daher ist der Logarithmus nicht definiert, und somit ist $x=0$ auch keine Lösung.

Probe für $x=2$

$$\log_{10}\left(20\cdot\mathbf{2}^2+10\cdot\mathbf{2}\right)=\log_{10}(50\cdot\mathbf{2})$$

$\log_{10}100=\log_{10}100$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2m

Gegeben:

$\log_2\left(2x^2 - 4x\right) = \log_2(4x)$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$2x^2 - 4x = 4x \quad | -4x$

$2x^2 - 8x = 0 \quad |$ 2x ausklammern

$2x(x-4) = 0 \quad |$ Ein Produkt ist gleich Null, wenn ein Faktor gleich Null ist

$x = 0$ oder 4

Probe für $x = 0$

$\log_2\left(2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0\right) = \log_2(4 \cdot 0)$

$\log_2 0 = \log_2 0$

Die Numeri auf beiden Seiten sind gleich Null,
daher ist der Logarithmus nicht definiert,
und somit ist $x = 0$ auch keine Lösung.

Probe für $x = 4$

$\log_2\left(2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4\right) = \log_2(4 \cdot 4)$

$\log_2 16 = \log_2 16$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L = \{4\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2n

Gegeben:

$\log_8(15x^2+2x)=\log_8(32x)$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$15x^2+2x=32x \qquad | -32x$

$15x^2-30x=0 \qquad |$ 15x ausklammern

$15x(x-2)=0 \qquad |$ Ein Produkt ist gleich Null, wenn ein Faktor gleich Null ist

$x=0$ oder $2$

Probe für $x=0$

$\log_8(15\cdot\mathbf{0}^2+2\cdot\mathbf{0})=\log_8(32\cdot\mathbf{0})$

$\log_8 0=\log_8 0$

Die Numeri auf beiden Seiten sind gleich Null, daher ist der Logarithmus nicht definiert, und somit ist $x=0$ auch keine Lösung.

Probe für $x=2$

$\log_8(15\cdot\mathbf{2}^2+2\cdot\mathbf{2})=\log_8(32\cdot\mathbf{2})$

$\log_8 64=\log_8 64$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2o

Gegeben:

$$\log_3\left(x^2+x+15\right)=\log_3\left(2x^2+2x+3\right)$$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$x^2+x+15=2x^2+2x+3 \quad \left|-x^2\right.$$

$$x+15=x^2+2x+3 \quad \left|-x\right.$$

$$0=x^2+x-12 \quad \left|-15\right.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 7}{2}$$

$x=3$ oder $-4$

Probe für $x=3$

$$\log_3\left(\mathbf{3}^2+\mathbf{3}+15\right)=\log_3\left(2\cdot\mathbf{3}^2+2\cdot\mathbf{3}+3\right)$$

$\log_3 27=\log_3 27$ **wahre Aussage**

Probe für $x=-4$

$$\log_3\left[(\mathbf{-4})^2+(\mathbf{-4})+15\right]=\log_3\left(2\cdot(\mathbf{-4})^2+2\cdot(\mathbf{-4})+3\right)$$

$\log_3 27=\log_3 27$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{-4;\ 3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2p

Gegeben:

$$\log_2\left(2x^2+3x+5\right)=\log_2\left(x^2+4x+11\right)$$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$2x^2+3x+5=x^2+4x+11 \qquad \left|-x^2\right.$$
$$x^2+3x+5=4x+11 \qquad \left|-4x\right.$$
$$x^2-x+5=11 \qquad \left|-11\right.$$
$$x^2-x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}$$
$$x=3 \text{ oder } -2$$

Probe für $x=3$

$$\log_2\left(2\cdot\mathbf{3}^2+3\cdot\mathbf{3}+5\right)=\log_2\left(\mathbf{3}^2+4\cdot\mathbf{3}+11\right)$$
$\log_2 32=\log_2 32$ **wahre Aussage**

Probe für $x=-2$

$$\log_2\left[2\cdot(\mathbf{-2})^2+3\cdot(\mathbf{-2})+5\right]=\log_2\left[(\mathbf{-2})^2+4\cdot(\mathbf{-2})+11\right]$$
$\log_2 7=\log_2 7$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{-2;\ 3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2q

Gegeben:

$$\log_5\left(x^2+5x+19\right)=\log_5\left(5x^2+5x+15\right)$$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$x^2+5x+19=5x^2+5x+15 \quad \left|-x^2\right.$$

$$5x+19=4x^2+5x+15 \quad \left|-5x\right.$$

$$19=4x^2+15 \quad \left|-15\right.$$

$$4=4x^2 \quad \left|:4\right.$$

$$1=x^2$$

$$x=1 \quad \text{und} \quad x=-1$$

Probe für $x=1$

$$\log_5\left(\mathbf{1}^2+5\cdot\mathbf{1}+19\right)=\log_5\left(5\cdot\mathbf{1}^2+5\cdot\mathbf{1}+15\right)$$

$\log_5 25=\log_5 25$ **wahre Aussage**

Probe für $x=-1$

$$\log_5\left[(-\mathbf{1})^2+5\cdot(-\mathbf{1})+19\right]=\log_5\left[5\cdot(-\mathbf{1})^2+5\cdot(-\mathbf{1})+15\right]$$

$\log_5 15=\log_5 15$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{-1;\ 1\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 2r

Gegeben:

$\log_2(2x^2+4x+2)=\log_2(x^2+2x+17)$

Lösungsweg:

Wir wenden den Satz an: Sind zwei Logarithmen gleich, dann sind auch ihre Numeri gleich:

$$
\begin{aligned}
2x^2+4x+2 &= x^2+2x+17 && \mid -x^2\\
x^2+4x+2 &= 2x+17 && \mid -2x\\
x^2+2x+2 &= 17 && \mid -17\\
x^2+2x-15 &= 0
\end{aligned}
$$

Quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}$$

$x=3$ und $x=-5$

Probe für $x=3$

$\log_2(2\bullet\mathbf{3}^2+4\bullet\mathbf{3}+2)=\log_2(\mathbf{3}^2+2\bullet\mathbf{3}+17)$

$\log_2 32=\log_2 32$ **wahre Aussage**

Probe für $x=-5$

$\log_2\left[2\bullet(-\mathbf{5})^2+4\bullet(-\mathbf{5})+2\right]=\log_2\left[(-\mathbf{5})^2+2\bullet(-\mathbf{5})+17\right]$

$\log_2 32=\log_2 32$ **wahre Aussage**

Lösungsmenge: $L=\{-5;\ 3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3a

Gegeben:

$\log_2(3x-1)+\log_2(x+5)=6$

Lösungsweg:

Wir wenden die 1.Logarithmusformel an:

$\log_2[(3x-1)\cdot(x+5)]=6$ | Klammern ausmultiplizieren

$\log_2[3x^2+15x-x-5]=6$ | vereinfachen

$\log_2[3x^2+14x-5]=6$ | Definition des Logarithmus anwenden

$2^6=3x^2+14x-5$ | $-2^6$

$0=3x^2+14x-69$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 3\cdot(-69)}}{2\cdot 3}=\frac{-14\pm\sqrt{1024}}{6}=\frac{-14\pm 32}{6}$$

$x=3$ und $x=-\frac{46}{6}$

Probe für $x=3$

$\log_2(3\cdot 3-1)+\log_2(3+5)=6$

$\log_2 8+\log_2 8=6$

$3+3=6$ **wahre Aussage**

Probe für $x=-\frac{46}{6}$

$$\log_2\left[3\cdot\left(-\frac{46}{6}\right)-1\right]+\log_2\left[\left(-\frac{46}{6}\right)+5\right]=6$$

**Weil die Numeri der Logarithmen negativ sind, ist $\left(-\frac{46}{6}\right)$ keine Lösung der Logarithmusgleichung.**

Lösungsmenge: $L=\{3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3b

**Gegeben:**

$\log_3(5x-1)+\log_3(9x+9)=5$

**Lösungsweg:**

Wir wenden die 1.Logarithmusformel an:

$\log_3[(5x-1)\cdot(9x+9)]=5$ | Klammern ausmultiplizieren

$\log_3[45x^2+45x-9x-9]=5$ | vereinfachen

$\log_3[45x^2+36x-9]=5$ | Definition des Logarithmus anwenden

$3^5=45x^2+36x-9$ | $-3^5$

$0=45x^2+36x-252$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4\cdot45\cdot(-252)}}{2\cdot45}=\frac{-36\pm216}{90}=\frac{-36\pm216}{90}$$

$x=2$ und $x=-2.8$

**Probe für $x=2$**

$\log_3(5\cdot\mathbf{2}-1)+\log_3(9\cdot\mathbf{2}+9)=5$

$\log_3 9+\log_3 27=5$

$2+3=5$ **wahre Aussage**

**Probe für $x=-1.8$**

$\log_3[5\cdot(\mathbf{-1.8})-1]+\log_3[9\cdot(\mathbf{-1.8})+9]=5$

$\log_3[-9-1]+\log_3[-16.2+9]=5$

**Weil die Numeri der Logarithmen negativ sind,**
**ist –1.8 keine Lösung der Logarithmusgleichung.**

**Lösungsmenge:** $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3c

**Gegeben:**

$\log_5(10x+25)-\log_5(x-5)=2$

**Lösungsweg:**

Wir wenden die 2.Logarithmusformel an:

$\log_5\frac{10x+25}{x-5}=2$ | Definition des Logarithmus anwenden

$5^2=\frac{10x+25}{x-5}$ | Potenz ausrechnen

$25=\frac{10x+25}{x-5}$ | $\cdot(x-5)$

$25(x-5)=10x+25$ | Klammer ausmultiplizieren

$25x-125=10x+25$ | $-10x+125$

$15x=150$ | $:15$

$x=10$

**Probe für $x=10$**

$\log_5(10\cdot\mathbf{10}+25)-\log_5(\mathbf{10}-5)=2$

$\log_5 125-\log_5 5=2$

$3-1=2$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3d

**Gegeben:**

$$\log_{10}(7x+51)+\log_{10}(15x-5)=4$$

**Lösungsweg:**

Wir wenden die 1.Logarithmusformel an:

$$\log_{10}\left[(7x+51)\cdot(15x-5)\right]=4 \qquad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$\log_{10}\left[105x^2-35x+765x-255\right]=4 \qquad | \text{ vereinfachen}$$

$$\log_{10}\left[105x^2+730x-255\right]=4 \qquad | \text{ Definition des Logarithmus anwenden}$$

$$10^4=105x^2+730x-255 \qquad | -10^4$$

$$0=105x^2+730x-10255$$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-730\pm\sqrt{730^2-4\cdot105\cdot(-10255)}}{2\cdot105}=$$

$$x_{1,2}=\frac{-730\pm\sqrt{532900+4307100}}{210}=\frac{-730\pm2200}{210}=-\frac{293}{21}$$

$$x=7 \quad \text{und} \quad x=-\frac{293}{21}$$

**Probe für x=7**

$$\log_{10}(7\cdot 7+51)+\log_{10}(15\cdot 7-5)=4$$

$$\log_{10}100+\log_{10}100=4$$

$2+2=4$ **wahre Aussage**

**Probe für $x=-\frac{293}{21}$**

$$\log_{10}\left[7\cdot\left(-\frac{293}{21}\right)+51\right]+\log_{10}\left[15\cdot\left(-\frac{293}{21}\right)-5\right]=4$$

**Weil die Numeri der Logarithmen negativ sind, sind die Logarithmen nicht definiert, und somit ist $-\frac{293}{21}$ keine Lösung der Logarithmusgleichung.**

**Lösungsmenge:** $L=\{7\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3e

**Gegeben:**

$\log_2(40x+24)-\log_2(7x+1)=3$

**Lösungsweg:**

Wir wenden die 2.Logarithmusformel an:

$\log_2 \frac{40x+24}{7x+1}=3$ | Definition des Logarithmus anwenden

$2^3=\frac{40x+24}{7x+1}$ | Potenz ausrechnen

$8=\frac{40x+24}{7x+1}$ | $\cdot(7x+1)$

$8(7x+1)=40x+24$ | Klammer ausmultiplizieren

$56x+8=40x+24$ | $-40x-8$

$16x=16$ | $:16$

$x=1$

**Probe für x=1**

$\log_2(40\cdot\mathbf{1}+24)-\log_2(7\cdot\mathbf{1}+1)=3$

$\log_2 64-\log_2 8=3$

$6-3=3$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{1\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3f

**Gegeben:**

$\log_2(2x-2)+\log_2(x+1)=\log_2(4x+4)$

**Lösungsweg:**

Wir wenden auf die linke Seite der Gleichung die 1.Logarithmusformel an:

$\log_2[(2x-2)\cdot(x+1)]=\log_2(4x+4)$

Nun benutzen wir wieder den Satz: Sind zwei Logarithmen (mit gleicher Basis) gleich, dann sind auch ihre Argumente (die Numeri) gleich:

$[(2x-2)\cdot(x+1)]=4x+4$ | Linke Seite: Klammern ausmultiplizieren

$2x^2+2x-2x-2=4x+4$ | Linke Seite vereinfachen

$2x^2-2=4x+4$ | $-4$

$2x^2-6=4x$ | $-4x$

$2x^2-4x-6=0$

Quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{4}=\frac{4\pm8}{4}$$

$x=3$ oder $x=-1$

**Probe für $x=3$**

$\log_2(2\cdot\mathbf{3}-2)+\log_2(\mathbf{3}+1)=\log_2(4\cdot\mathbf{3}+4)$

$\log_2 4+\log_2 4=\log_2 16$

$2+2=4$ **wahre Aussage**

**Probe für $x=-1$**

$\log_2(2\cdot(\mathbf{-1})-2)+\log_2(\mathbf{-1}+1)=\log_2(4\cdot(\mathbf{-1})+4)$

$\log_2(-4)+\log_2 0=\log_2 0$

**Alle drei Logarithmen sind nicht definiert.**
**Somit ist x=– 1 keine Lösung**

**Lösungsmenge:** $L=\{3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3g

**Gegeben:**

$$\log_3(10x+7)-\log_3(4x+1)=\log_3(2x-1)$$

**Lösungsweg:**

Wir wenden auf die linke Seite der Gleichung die 2.Logarithmusformel an:

$$\log_3\frac{10x+7}{4x+1}=\log_3(2x-1)$$

Nun benutzen wir wieder den Satz: Sind zwei Logarithmen (mit gleicher Basis) gleich, dann sind auch ihre Argumente (die Numeri) gleich:

$$\frac{10x+7}{4x+1}=2x-1 \qquad \Big|\ \cdot(4x+1)$$

$$10x+7=(2x-1)\cdot(4x+1) \qquad \Big|\ \text{Klammern ausmultiplizieren}$$

$$10x+7=8x^2+2x-4x-1 \qquad \Big|\ \text{rechte Seite vereinfachen}$$

$$10x+7=8x^2-2x-1 \qquad \Big|\ -10x$$

$$7=8x^2-12x-1 \qquad \Big|\ -7$$

$$0=8x^2-12x-8$$

Quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot8\cdot(-8)}}{2\cdot8}=$$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144+256}}{16}=\frac{12\pm\sqrt{400}}{16}=\frac{12\pm20}{16}$$

$$x=2\ \text{ oder } x=-0.5$$

**Probe für $x=2$**

$$\log_3(10\cdot\mathbf{2}+7)-\log_3(4\cdot\mathbf{2}+1)=\log_3(2\cdot\mathbf{2}-1)$$

$$\log_3 27-\log_3 9=\log_3 3$$

$$3-2=1$$ **wahre Aussage**

**Probe für $x=-0.5$**

$$\log_3[10\cdot(\mathbf{-0.5})+7]-\log_3[4\cdot(\mathbf{-0.5})+1]=\log_3[2\cdot(\mathbf{-0.5})-1]$$

**Zwei Logarithmen sind nicht definiert, da ihre Argumente negativ sind. Somit ist x=– 0.5 keine Lösung**

**Lösungsmenge:** $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 3h

**Gegeben:**

$$\log_2(10x+24)-\log_2(x-84)=\log_2(x-36)$$

**Lösungsweg:**

Wir wenden auf die linke Seite der Gleichung die 2.Logarithmusformel an:

$$\log_2\frac{10x+24}{x-84}=\log_2(x-36)$$

Nun benutzen wir wieder den Satz: Sind zwei Logarithmen (mit gleicher Basis) gleich, dann sind auch ihre Argumente (die Numeri) gleich:

$$\frac{10x+24}{x-84}=x-36 \qquad \Big| \cdot(x-84)$$

$$10x+24=(x-36)\cdot(x-84) \qquad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$10x+24=x^2-84x-36x+3024 \qquad | \text{ rechte Seite vereinfachen}$$

$$10x+24=x^2-120x+3024 \qquad | -10x$$

$$24=x^2-130x+3024 \qquad | -24$$

$$0=x^2-130x+3000$$

Quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-130)\pm\sqrt{(-130)^2-4\cdot1\cdot3000}}{2\cdot1}=\frac{130\pm\sqrt{16900-12000}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{130\pm\sqrt{4900}}{2}=\frac{130\pm70}{2}$$

$$x=100 \;\text{ oder }\; x=30$$

**Probe für x=100**

$$\log_2(10\cdot\mathbf{100}+24)-\log_2(\mathbf{100}-84)=\log_2(\mathbf{100}-36)$$

$$\log_2 1024-\log_2 16=\log_2 64$$

$$10-4=6$$ **wahre Aussage**

**Probe für $x=30$**

$$\log_2(10\cdot\mathbf{30}+24)-\log_2(\mathbf{30}-84)=\log_2(\mathbf{30}-36)$$

**Zwei Logarithmen sind nicht definiert, da ihre Argumente negativ sind. Somit ist x=30 keine Lösung**

**Lösungsmenge:** L={100}

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4a

**Gegeben:**

$$\frac{20\cdot\log_{10}(9x+46)-4}{2\cdot\log_{10}(9x+46)+2}=6$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(9x+46)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$\frac{20\cdot z-4}{2\cdot z+2}=6 \quad \Big|\ \cdot(2z+2)$$

$$20z-4=6\cdot(2z+2) \quad \Big|\ \text{Klammer ausmultiplizieren}$$

$$20z-4=12z+12 \quad \Big|\ -12z$$

$$8z-4=12 \quad \Big|\ +4$$

$$8z=16 \quad \Big|\ :8$$

$$z=2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(9x+46)=2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2=9x+46 \quad \Big|\ 10^2=100$$

$$100=9x+46 \quad \Big|\ -46$$

$$54=9x \quad \Big|\ :9$$

$$6=x$$

**Probe für x = 6**

$$\frac{20\cdot\log_{10}(9\cdot\mathbf{6}+46)-4}{2\cdot\log_{10}(9\cdot\mathbf{6}+46)+2}=6$$

$$\frac{20\cdot\log_{10}100-4}{2\cdot\log_{10}100+2}=6$$

$$\frac{20\cdot 2-4}{2\cdot 2+2}=6$$

$\frac{36}{6}=6$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{6\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4b

**Gegeben:**

$$\frac{9\cdot\log_{10}(40x+20)-4}{2\cdot\log_{10}(40x+20)+3}=2$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$$\log_{10}(40x+20)=z \qquad \text{(Substitutionsgleichung)}$$

Und erhalten:

$$\frac{9\cdot z-4}{2\cdot z+3}=2 \qquad \Big|\ \cdot(2z+3)$$

$$9z-4=2\cdot(2z+3) \qquad |\ \text{Klammer ausmultiplizieren}$$

$$9z-4=4z+6 \qquad |\ -4z$$

$$5z-4=6 \qquad |\ +4$$

$$5z=10 \qquad |\ :5$$

$$z=2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$$\log_{10}(40x+20)=2$$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2=40x+20 \qquad |\ 10^2=100$$

$$100=40x+20 \qquad |\ -20$$

$$80=40x \qquad |\ :40$$

$$2=x$$

**Probe für x = 2**

$$\frac{9\cdot\log_{10}(40\cdot\mathbf{2}+20)-4}{2\cdot\log_{10}(40\cdot\mathbf{2}+20)+3}=2$$

$$\frac{9\cdot\log_{10}100-4}{2\cdot\log_{10}100+3}=2$$

$$\frac{9\cdot 2-4}{2\cdot 2+3}=2$$

$$\frac{14}{7}=2 \qquad \textbf{wahre Aussage}$$

**Lösungsmenge:** $L=\{2\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4c

**Gegeben:**

$$\frac{4\cdot\log_{10}(20x+20)+2}{4\cdot\log_{10}(20x+20)-7}=10$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(20x+20)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$\frac{4\cdot z+2}{4\cdot z-7}=10 \qquad \Big|\ \cdot(4z-7)$$

$4z+2=10\cdot(4z-7)$ | Klammer ausmultiplizieren

$4z+2=40z-70$ | $-4z$

$2=36z-70$ | $+70$

$72=36z$ | $:36$

$z=2$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(20x+20)=2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10^2=20x+20$ | $10^2=100$

$100=20x+20$ | $-20$

$80=20x$ | $:20$

$4=x$

**Probe für x = 4**

$$\frac{4\cdot\log_{10}(20\cdot 4+20)+2}{4\cdot\log_{10}(20\cdot 4+20)-7}=10$$

$$\frac{4\cdot\log_{10}100+2}{4\cdot\log_{10}100-7}=10$$

$$\frac{4\cdot 2+2}{4\cdot 2-7}=10$$

$$\frac{10}{1}=10$$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{4\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4d

**Gegeben:**

$$\frac{8\cdot\log_{10}(190x+50)+3}{5\cdot\log_{10}(190x+50)-6}=3$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(190x+50)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$\frac{8\cdot z+3}{5\cdot z-6}=3 \qquad \Big|\ \cdot(5z-6)$$

$8z+3=3\cdot(5z-6)$ | Klammer ausmultiplizieren

$8z+3=15z-18$ | $-8z$

$3=7z-18$ | $+18$

$21=7z$ | $:7$

$z=3$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(190x+50)=3$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10^3=190x+50$ | $10^2=100$

$1000=190x+50$ | $-50$

$950=190x$ | $:190$

$5=x$

**Probe für $x=5$**

$$\frac{8\cdot\log_{10}(190\cdot\mathbf{5}+50)+3}{5\cdot\log_{10}(190\cdot\mathbf{5}+50)-6}=3$$

$$\frac{8\cdot\log_{10}1000+3}{5\cdot\log_{10}1000-6}=3$$

$$\frac{8\cdot3+3}{5\cdot3-6}=3$$

$\frac{27}{9}=3$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4e

**Gegeben:**

$$\frac{9\cdot\log_{10}(10x+10)-4}{2\cdot\log_{10}(10x+10)+3}=2$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(10x+10)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$\frac{9\cdot z-4}{2\cdot z+3}=2 \quad \left| \cdot(2z+3)\right.$$

$9z-4=2\cdot(2z+3)$ | Klammer ausmultiplizieren

$9z-4=4z+6$ | $-4z$

$5z-4=6$ | $+4$

$5z=10$ | $:5$

$z=2$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(10x+10)=2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10^2=10x+10$ | $10^2=100$

$100=10x+10$ | $-10$

$90=10x$ | $:10$

$9=x$

**Probe für $x=9$**

$$\frac{9\cdot\log_{10}(10\cdot 9+10)-4}{2\cdot\log_{10}(10\cdot 9+10)+3}=2$$

$$\frac{9\cdot\log_{10}100-4}{2\cdot\log_{10}100+3}=2$$

$$\frac{9\cdot 2-4}{2\cdot 2+3}=2$$

$$\frac{14}{7}=2$$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{9\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4f

**Gegeben:**

$$\frac{5\cdot\log_{10}(2x+4)+4}{4\cdot\log_{10}(2x+4)-3}=9$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(2x+4)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$\frac{5\cdot z+4}{4\cdot z-3}=9 \quad | \cdot(4z-3)$

$5z+4=9\cdot(4z-3) \quad |$ Klammer ausmultiplizieren

$5z+4=36z-27 \quad | -5z$

$4=31z-27 \quad | +27$

$31=31z \quad | :31$

$z=1$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(2x+4)=1$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10=2x+4 \quad | -4$

$6=2x \quad | :2$

$3=x \quad | :10$

**Probe für $x=3$**

$$\frac{5\cdot\log_{10}(2\cdot 3+4)+4}{4\cdot\log_{10}(2\cdot 3+4)-3}=9$$

$$\frac{5\cdot\log_{10}10+4}{4\cdot\log_{10}10-3}=9$$

$$\frac{5\cdot 1+4}{4\cdot 1-3}=9$$

$\frac{9}{1}=9$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{3\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4g

**Gegeben:**

$$\frac{6\cdot\log_{10}(99x+10)+2}{\log_{10}(99x+10)-1}=10$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(99x+10)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$\frac{6\cdot z+2}{z-1}=10 \qquad \mid \cdot(z-1)$$

$6z+2=10\cdot(z-1)$ | Klammer ausmultiplizieren

$6z+2=10z-10$ | $-6z$

$2=4z-10$ | $+10$

$12=4z$ | $:4$

$z=3$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(99x+10)=3$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10^3=99x+10$ | $10^3=1000$

$1000=99x+10$ | $:10$

$990=99x$ | $:99$

$x=10$

**Probe für x=10**

$$\frac{6\cdot\log_{10}(99\cdot\mathbf{10}+10)+2}{\log_{10}(99\cdot\mathbf{10}+10)-1}=10$$

$$\frac{6\cdot\log_{10}1000+2}{\log_{10}1000-1}=10$$

$$\frac{6\cdot 3+2}{3-1}=10$$

$$\frac{20}{2}=10$$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge :** $L=\{10\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4h

**Gegeben:**

$$25\left[\log_{10}(x+90)\right]^2 - 100\log_{10}(x+90) = -100$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(x+90) = z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$25z^2 - 100z = -100 \qquad |+100$

$25z^2 - 100z + 100 = 0$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4\cdot 25\cdot 100}}{2\cdot 25}$$

$$z_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 10000}}{50} = \frac{100 \pm 0}{50} = 2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(x+90) = 2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$10^2 = x + 90 \qquad |\ 10^2 = 100$

$100 = x + 90 \qquad |\ -90$

$10 = x \qquad |\ :99$

**Probe für x=10**

$25\left[\log_{10}(\mathbf{10} + 90)\right]^2 - 100\log_{10}(\mathbf{10} + 90) = -100$

$25\left[\log_{10}100\right]^2 - 100\log_{10}100 = -100$

$25\cdot 2^2 - 100\cdot 2 = -100$

$100 - 200 = -100$

$-100 = -100$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \{10\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4i

**Gegeben:**

$$4[\log_{10}(x+95)]^2 - 16\log_{10}(x+95) = -16$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(x+95) = z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$4z^2 - 16z = -16 \qquad |+16$$

$$4z^2 - 16z + 16 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4}$$

$$z_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{8} = \frac{16 \pm 0}{8} = 2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(x+95) = 2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2 = x + 95 \qquad | \; 10^2 = 100$$

$$100 = x + 95 \qquad | \; -95$$

$$5 = x$$

**Probe für x=5**

$$4[\log_{10}(5 + 95)]^2 - 16\log_{10}(5 + 95) = -16$$

$$4[\log_{10}100]^2 - 16\log_{10}100 = -16$$

$$4 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 = -16$$

$$16 - 32 = -16$$

$-16 = -16$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{5\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4j

**Gegeben:**

$$9\left[\log_{10}(x+50)\right]^2 - 36\log_{10}(x+50) + 36 = 0$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(x+50) = z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$9 \cdot z^2 - 36 \cdot z + 36 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 36}}{2 \cdot 9}$$

$$z_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1296}}{18} = \frac{36 \pm 0}{18} = 2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(x+50) = 2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2 = x + 50 \qquad \left|\ 10^2 = 100\right.$$

$$100 = x + 50 \qquad \left|\ -50\right.$$

$$50 = x$$

**Probe für x = 50**

$$9\left[\log_{10}(\mathbf{50} + 50)\right]^2 - 36\log_{10}(\mathbf{50} + 50) + 36 = 0$$

$$9\left[\log_{10}100\right]^2 - 36\log_{10}100 + 36 = 0$$

$$9 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 36 = 0$$

$$36 - 36 \cdot 2 + 36 = 0$$

$0 = 0$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \{50\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4k

**Gegeben:**

$$16\left[\log_{10}(x+30)\right]^2 - 64\log_{10}(x+30) + 64 = 0$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(x+30) = z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$16z^2 - 64z + 64 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-64) \pm \sqrt{(-64)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 64}}{2 \cdot 16}$$

$$z_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4096}}{32} = \frac{64 \pm 0}{32} = 2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$$\log_{10}(x+30) = 2$$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2 = x + 30 \qquad |\ 10^2 = 100$$

$$100 = x + 30 \qquad |\ -30$$

$$70 = x$$

**Probe für x=70**

$$16\left[\log_{10}(\mathbf{70} + 30)\right]^2 - 64\log_{10}(\mathbf{70} + 30) + 64 = 0$$

$$16\left[\log_{10}100\right]^2 - 64\log_{10}100 + 64 = 0$$

$$16 \cdot 2^2 - 64 \cdot 2 + 64 = 0$$

$$64 - 128 + 64 = 0$$

$0 = 0$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \{70\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4L

**Gegeben:**

$$4[\log_{10}(x+80)]^2-16\log_{10}(x+80)+16=0$$

**Lösungsweg:**

Wir substituieren:

$\log_{10}(x+80)=z$ (Substitutionsgleichung)

Und erhalten:

$$4z^2-16z+16=0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot4\cdot16}}{2\cdot4}$$

$$z_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-256}}{8}=\frac{16\pm0}{8}=2$$

Nun nehmen wir die Rücksubstitution vor:

$\log_{10}(x+80)=2$

Als nächstes verwenden wir die Definition des Logarithmus:

$$10^2=x+80 \qquad |\ 10^2=100$$

$$100=x+80 \qquad |\ -80$$

$$20=x$$

**Probe für x=20**

$$4[\log_{10}(20+80)]^2-16\log_{10}(20+80)+16=0$$

$$4[\log_{10}100]^2-16\log_{10}100+16=0$$

$$4\cdot2^2-16\cdot2+16=0$$

$$16-32+16=0$$

$0=0$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** L={20}

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4m

**Gegeben:**

$$x^{\log_{10} x} + 100x^{-\log_{10} x} - 20 = 0$$

**Lösungsweg:**

Wir schreiben $x^{-\log_{10} x}$ als Bruch:

$$x^{\log_{10} x} + 100 \cdot \frac{1}{x^{\log_{10} x}} - 20 = 0 \qquad \Big|\text{Bruchrechnung anwenden}$$

$$x^{\log_{10} x} + \frac{100}{x^{\log_{10} x}} - 20 = 0$$

Wir substituieren:

$$x^{\log_{10} x} = z \qquad \text{(Substitutionsgleichung)}$$

Und erhalten:

$$z + \frac{100}{z} - 20 = 0 \qquad \Big|\cdot z$$

$$z^2 + \frac{100z}{z} - 20z = 0 \qquad \Big|\text{kürzen}$$

$$z^2 + 100 - 20z = 0 \qquad \Big|\text{Summanden umstellen}$$

$$z^2 - 20z + 100 = 0$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1}$$

$$z_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{20 \pm 0}{2}$$

$$z = 10$$

**Die Rücksubstitution folgt auf der nächsten Seite =>**

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

Fortsetzung:

$z = 10$

Rücksubstitution durchführen:

| | |
|---|---|
| $x^{\log_{10} x} = 10$ | $\mid \log_{10}(\ldots)$ |
| $\log_{10}\left(x^{\log_{10} x}\right) = \log_{10} 10$ | $\mid$3.Logarithmusgesetz |
| $\log_{10}(x) \cdot \log_{10}(x) = \log_{10} 10$ | $\mid$zusammenfassen |
| $\left[\log_{10}(x)\right]^2 = 1$ | $\mid \sqrt{\;}$ |
| $\lvert \log_{10}(x) \rvert = 1$ | $\mid$ |
| $\pm\log_{10}(x) = 1$ | $\mid$ |
| $\log_{10}(x) = \pm 1$ | $\mid$Definition des Logarithmus anwenden |
| $x_1 = 10^1 = 10$ | |
| $x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ | |

**Nun müssen wir für beide Ergebnisse die Probe machen:**

**Probe für $x = 10$**

$$10^{\log_{10} 10} + 100 \cdot 10^{-\log_{10} 10} - 20 = 0$$

$$10^1 + 100 \cdot 10^{-1} - 20 = 0$$

$$10 + 100 \cdot \frac{1}{10} - 20 = 0$$

$$10 + 10 - 20 = 0$$

$0 = 0$ **wahre Aussage**

**Probe für $x = \frac{1}{10}$**

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)} + 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)} - 20 = 0$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} + 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-(-1)} - 20 = 0$$

$$10 + 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{1} - 20 = 0$$

$$10 + 10 - 20 = 0$$

$0 = 0$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \left\{10 \; ; \; \frac{1}{10}\right\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 4n

**Gegeben:**

$$x^{\log_2 x} + 32x^{-\log_2 x} = 18$$

**Lösungsweg:**

Wir schreiben $x^{-\log_2 x}$ als Bruch:

$$x^{\log_2 x} + 32 \cdot \frac{1}{x^{\log_2 x}} = 18 \qquad | \text{Bruchrechnung anwenden}$$

$$x^{\log_2 x} + \frac{32}{x^{\log_2 x}} = 18$$

Wir substituieren:

$$x^{\log_2 x} = z \qquad \text{(Substitutionsgleichung)}$$

Und erhalten:

$$z + \frac{32}{z} = 18 \qquad | \cdot z$$

$$z^2 + \frac{32z}{z} = 18z \qquad | \text{kürzen}$$

$$z^2 + 32 = 18z \qquad | -18z$$

$$z^2 - 18z + 32 = 0 \qquad | :2$$

Wir benutzen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1}$$

$$z_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 128}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{18 \pm 14}{2}$$

$$z_1 = 16$$

$$z_2 = 2$$

**Die Rücksubstitution folgt auf der nächsten Seite =>**

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

Fortsetzung:

$z_1 = 16$

$z_2 = 2$

Da wir zwei Lösungen für z erhalten, müssen wir zwei Rücksubstitutionen durchführen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^{\log_2 x} = 16$ | $\vert \log_2(...)$ | $x^{\log_2 x} = 2$ | $\vert \log_2(...)$ |
| $\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2 16$ | $\vert$ 3.Logarithmusgesetz | $\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2 2$ | $\vert$ 3.Logarithmusgesetz |
| $\log_2(x) \cdot \log_2(x) = 4$ | $\vert$ zusammenfassen | $\log_2(x) \cdot \log_2(x) = 1$ | $\vert$ zusammenfassen |
| $\left[\log_2(x)\right]^2 = 4$ | $\vert \sqrt{\ }$ | $\left[\log_2(x)\right]^2 = 1$ | $\vert \sqrt{\ }$ |
| $\log_2(x) = \vert 2 \vert$ | $\vert$ Definition des Logarithmus anwenden | $\log_2(x) = \vert 1 \vert$ | $\vert$ Definition des Logarithmus anwenden |
| $2^{\vert 2 \vert} = x$ | $\vert$ Lösung berechnen | $2^{\vert 1 \vert} = x$ | $\vert$ Lösung berechnen |
| $x_1 = 2^2 = 4$ | | $x_3 = 2^1 = 2$ | |
| $x_2 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ | | $x_4 = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ | |

**Nun müssen wir für alle 4 Ergebnisse die Probe machen:**

**Probe für $x = 4$**

$$4^{\log_2 4} + 32 \cdot 4^{-\log_2 4} = 18$$

$$4^2 + 32 \cdot 4^{-2} = 18$$

$16 + 2 = 18$ **wahre Aussage**

**Probe für $x = \frac{1}{4}$**

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)} + 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\log_2\left(\frac{1}{4}\right)} = 18$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-(-2)} = 18$$

$$16 + 32 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = 18$$

$16 + 2 = 18$ **wahre Aussage**

**Probe für $x = 2$**

$$2^{\log_2 2} + 32 \cdot 2^{-\log_2 2} = 18$$

$$2^1 + 32 \cdot 2^{-1} = 18$$

$2 + 16 = 18$ **wahre Aussage**

**Probe für $x = \frac{1}{2}$**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} + 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = 18$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-(-1)} = 18$$

$$2 + 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 18$$

$2 + 16 = 18$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 2; 4\right\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 5a

**Gegeben:**

$\log_4\left(x^2+2x-8\right)=\log_2(x)$

**Lösungsweg:**

Auf der linken Seite der Gleichung benutzen wir den Basiswechselsatz: $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ,

um die Basis des Logarithmus so zu verändern, dass sie mit der Basis
auf der rechten Seite identisch ist:

$\dfrac{\log_2\left(x^2+2x-8\right)}{\log_2(4)}=\log_2(x)$ $\quad|$ Nennervereinfachen: $\log_2(4)=2$

$\dfrac{\log_2\left(x^2+2x-8\right)}{2}=\log_2(x)$ $\quad| \cdot 2$

$\log_2\left(x^2+2x-8\right)=2\cdot\log_2(x)$ $\quad| \; n\cdot\log_a b=\log_a b^n$

$\log_2\left(x^2+2x-8\right)=\log_2 x^2$

Nun können wir das Lösungsverfahren "Gleichsetzen der Numeri" anwenden:

$x^2+2x-8=x^2$ $\quad| -x^2$

$2x-8=0$ $\quad| +8$

$2x=8$ $\quad| :2$

$x=4$

**Probe für x = 4**

$\log_4\left(x^2+2x-8\right)=\log_2(x)$

$\log_4\left(4^2+2\cdot 4-8\right)=\log_2(4)$

$\log_4(16+8-8)=2$

$\log_4(16)=2$

$2=2$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L=\{4\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 5b

**Gegeben:** $\log_8(7x^2) - \log_2(x) = 0$

**Lösungsweg:**

Auf der linken Seite der Gleichung benutzen wir den Basiswechselsatz: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ , damit alle Logarithmen die (gleiche) Basis 2 haben:

$\frac{\log_2(7x^2)}{\log_2(8)} = \log_2(x)$ | Vereinfache: $\log_2(8) = 3$

$\frac{\log_2(7x^2)}{3} = \log_2(x)$ | $\cdot 3$

$\log_2(7x^2) = 3 \cdot \log_2(x)$ | Wende auf der rechten Seite die 3.Logarithmusformel an: $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$

$\log_2(7x^2) = \log_2(x^3)$

Nun können wir das Lösungsverfahren "Gleichsetzen der Numeri" anwenden:

$7x^2 = x^3$ | $-7x^2$

$x^3 - 7x^2 = 0$ | $x^2$ ausklammern

$x^2(x-7) = 0$

Ein Produkt ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist:

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 7$

**Probe für x = 0**

$\log_8(7x^2) - \log_2(x) = 0$

Logarithmen sind für x=0 nicht definiert, denn Logarithmen sind nur für positive Zahlen definiert. Daher ist x=0 keine Lösung.

**Probe für x = 7**

$\log_8(7x^2) - \log_2(x) = 0$

$\log_8(7 \cdot \mathbf{7}^2) - \log_2 \mathbf{7} = 0$

$\log_8(7^3) - \log_2 7 = 0$ | Basiswechselsatz auf 1.Summand anwenden: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\frac{\log_2(7^3)}{\log_2(8)} - \log_2 7 = 0$ | Nenner vereinfachen

$\frac{\log_2(7^3)}{3} - \log_2 7 = 0$ | Zähler: 3.Logarithmusgesetz anwenden: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$\frac{3 \cdot \log_2 7}{3} - \log_2 7 = 0$ | kürzen

$\log_2 7 - \log_2 7 = 0$

$0 = 0$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \{7\}$

# Übungen zum Kurs Logarithmusgleichungen

## Lösung zu 5c

**Gegeben:** $\log_{100}\left(2x^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(x^2\right)$

**Lösungsweg:**

Auf der linken Seite der Gleichung benutzen wir den Basiswechselsatz: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ , damit alle Logarithmen die (gleiche) Basis (10) haben:

$$\frac{\log_{10}\left(2x^4 - 10.000\right)}{\log_{10}(100)} = \log_{10}\left(x^2\right) \qquad \Big|\ \text{Vereinfache:} \log_{10}(100) = 2$$

$$\frac{\log_{10}\left(2x^4 - 10.000\right)}{2} = \log_{10}\left(x^2\right) \qquad \Big|\ \cdot 2$$

$$\log_{10}\left(2x^4 - 10.000\right) = 2 \cdot \log_{10}\left(x^2\right) \qquad \Big|\ \begin{array}{l}\text{Wende auf der rechten Seite}\\ \text{die 3.Logarithmusformel an:}\\ n \cdot \log_a b = \log_a b^n\end{array}$$

$$\log_{10}\left(2x^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(x^2\right)^2 \qquad \Big|\ \text{Rechts: Potenzgesetz anwenden: } \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\log_{10}\left(2x^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(x^4\right)$$

Nun können wir das Lösungsverfahren "Gleichsetzen der Numeri" anwenden:

$$2x^4 - 10.000 = x^4 \qquad \Big| -x^4$$

$$x^4 - 10.000 = 0 \qquad \Big| +10000$$

$$x^4 = 10.000 \qquad \Big| \sqrt[4]{....}$$

$$x = \pm 10$$

**Probe für x=10**

$$\log_{100}\left(2x^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(x^2\right)$$

$$\log_{100}\left(2 \cdot \mathbf{10}^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(\mathbf{10}^2\right)$$

$$\log_{100}(20.000 - 10.000) = \log_{10}(100)$$

$2 = 2$ **wahre Aussage**

**Probe für x = –10**

$$\log_{100}\left(2x^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(x^2\right)$$

$$\log_{100}\left(2 \cdot (\mathbf{-10})^4 - 10.000\right) = \log_{10}\left(\mathbf{-10}^2\right)$$

$$\log_{100}(20.000 - 10.000) = \log_{10}(100)$$

$2 = 2$ **wahre Aussage**

**Lösungsmenge:** $L = \{10\ ; -10\}$